Trabajo Fin de Máster

Proporcionalidad aritmética directa: una propuesta didáctica para 1º de ESO

Direct arithmetic proportionality: a didactical proposal for first year of ESO

Autora

LARA GARIJO LABANDA

Director

ALBERTO ARNAL BAILERA

Facultad de Educación
Curso 2015-2016

Índice

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar. 3

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático. 6

C. Sobre los conocimiento previos del alumno. 18

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático. 22

E. Sobre el campo de problemas. 32

F. Sobre las técnicas 40

G. Sobre las tecnologías 46

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma 52

I. Sobre la metodología 57

J. Sobre la evaluación: guía de corrección de la prueba escrita 58

K. Referencias 69

L. ANEXOS 71

Anexo I: Resolución de los campos de problemas 71

Anexo II: Recurso TIC 80

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar.

El objeto matemático a enseñar a lo largo de esta memoria es la proporcionalidad aritmética directa.

La proporcionalidad juega un papel importante en la construcción del pensamiento matemático de los ciudadanos, y en particular de los estudiantes. Se trata de un tópico matemático muy contextualizado en la vida cotidiana y que ayuda a predecir situaciones a través de su conocimiento: el precio de un kilo de manzanas en función de su peso, la gasolina que va a consumir mi coche si hago un trayecto de 200 km, etc.

La proporcionalidad aritmética relaciona cantidades de magnitudes que inicialmente no tienen una relación de medida en común y establece una relación o comparación entre ellas. De esta forma, predecir situaciones en los que interviene el cálculo a través del razonamiento proporcional se convierte en una tarea más sencilla.

Una pareja de magnitudes pueden estar o no relacionadas. En caso de que lo estén, pueden relacionarse de forma proporcional o no. Asimismo, dentro de la relación de proporcionalidad, la relación puede ser directa o inversa entre dos cantidades de magnitudes. Sin embargo, a lo largo de esta memoria me voy a centrar en la relación de proporcionalidad directa.

En primer lugar, para establecer una relación de proporcionalidad directa se debe diferenciar entre qué cantidades son magnitudes y cuáles no, y finalmente de las que lo son, qué pareja de cantidades de magnitudes cumplen una condición de regularidad que define una relación de proporcionalidad directa según el contexto.

Para iniciar con el razonamiento proporcional, se han de distinguir las nociones de razón, fracción, proporción y proporcionalidad. Todas ellas están relacionadas y tienen un significado similar. No obstante, su correcta diferenciación merece el acercamiento al entendimiento de la razón de ser de la proporcionalidad.

El objeto matemático que se presenta se sitúa en el primer curso de Educación Secundaria Obligatoria en la asignatura de Matemáticas.

Según se presenta en la Orden ECD/489/2016, de 26 de Mayo de 2016, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón, los contenidos mínimos establecidos para este objeto matemático a enseñar en el primer curso de secundaria son:

Bloque 2. Números y Álgebra

> *Cálculo con porcentajes (mental, manual y calculadora). Aumentos y disminuciones porcentuales. Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad. Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa e inversa.*

En esta propuesta también se trabajarán los repartos proporcionales que están situados en el segundo curso de la Educación Secundaria de la presente Orden. Los criterios de evaluación correspondientes a estos contenidos mínimos establecidos en la misma son:

> *Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc…) para obtener elementos desconocidos de un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existen variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales.*

Inicialmente, esta propuesta tenía como finalidad enseñar la proporcionalidad directa en el primer curso de Secundaria y dejar la proporcionalidad inversa para el siguiente curso debido a que dicho tópico supone la introducción de bastantes objetos matemáticos a enseñar. Esta propuesta estaba respaldada por la Orden de 9 de Mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón, que solamente establecía como contenido mínimo las magnitudes directamente proporcionales para el primer curso de Secundaria. Asimismo, la ley estatal actual (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato) aborda las magnitudes directa e inversamente proporcionales para el primer y segundo curso de Secundaria, por lo que me daba libertad para hacer la propuesta previa. Sin embargo, una nueva Orden autonómica ha sido aprobada y publicada a escasos días de hacer entrega de este trabajo. Dicha Orden, tal y como se describe más adelante, considera que los contenidos mínimos para el primer curso de Secundaria son las magnitudes directa e inversamente proporcionales. Es por ello que, ampliar esta propuesta con las magnitudes inversamente proporcionales implicaría sobrepasar demasiado los límites de extensión establecidos, y a su vez se une la falta de tiempo para elaborarla. Por lo tanto, la presente propuesta didáctica solamente trabaja la proporcionalidad directa, dando libertad a la enseñanza de la proporcionalidad inversa en este mismo curso de Secundaria.

Los campos de problemas serán presentados en función del desarrollo cognitivo del alumno, es decir, estarán contextualizados de situaciones que los alumnos encuentran familiares.

Las técnicas y tecnologías serán aquellas cuyas operaciones involucradas tengan un significado claro de forma que su aprendizaje no sea un método memorístico que no implique una reflexión previa para la resolución de problemas. Para llevar a cabo este objetivo, la principal estrategia para resolver los problemas va ser la reducción a la unidad. A pesar de que existe una correspondencia muy estrecha entre la proporcionalidad y la Regla de Tres -como método sencillo para la búsqueda de solución del problema-, esta propuesta didáctica no la considera como una técnica a enseñar a los alumnos, mostrando más adelante los motivos de esta decisión (Apartado B).

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático.

Se han realizado estudios que destacan las diferencias entre docentes a la hora de entender o justificar la introducción de la proporcionalidad como objeto de enseñanza. Tal como destaca Ruiz (2006), los docentes en función de los propósitos que se plantean para enseñar el tema de proporcionalidad a sus alumnos se clasifican en tres grupos. En primer lugar, una parte de los docentes creen indispensable la proporcionalidad para resolver problemas de la vida diaria, relacionar la matemática con la realidad. Otros docentes creen que el propósito de la proporcionalidad es que los alumnos sean capaces de reconocer y diferenciar situaciones que sean o no proporcionales, si existe proporcionalidad directa o inversa o bien si una situación se puede resolver a través de la regla de tres. En cambio un tercer grupo de docentes inciden en que, además de lo anterior, los propósitos de la proporcionalidad se centran en saber anticipar resultados (por ejemplo, si van de viaje, cuánta gasolina necesitarían sabiendo los kilómetros que van a recorrer). Aunque estos tres grupos de profesores destacan sus propias concepciones sobre los propósitos de este tópico matemático, la planificación de la práctica educativa, en gran parte, está influenciada por la secuenciación que fijan los libros de texto de las diferentes editoriales. Martínez, Muñoz y Oller (2015) apuntan que los docentes hacen uso del libro de texto para decidir qué tareas se han de implementar con sus alumnos y cómo hacerlo. Además mencionan a diversos autores (Huntley y Terrel, 2014; Schubring, 1987) señalando su hincapié en el "currículo escrito" establecido por los propios libros de texto. La importancia de los libros de texto en las aulas ha despertado cierto interés en algunos investigadores (Azcárate y Serradó, 2006) en analizar de forma pormenorizada la estructura, los objetivos, los contenidos, las actividades que se proponen, así como la secuenciación de cada una de la unidades didácticas.

A continuación, tomando como referencia tres libros de texto de matemáticas para alumnos de primero de la ESO, se muestra como se justifica la enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad aritmética y los porcentajes.

<u>**Libro de Santillana:**</u>

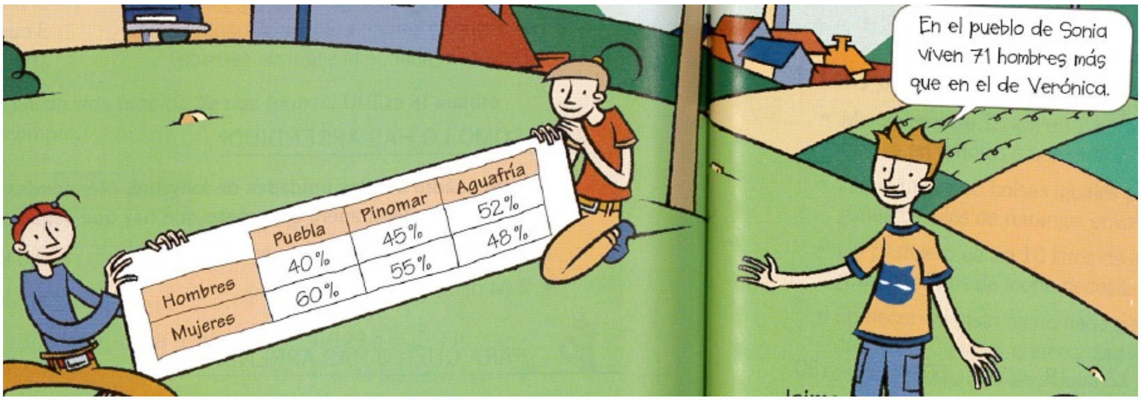
El libro de Santillana inicia el capítulo de proporcionalidad aritmética como una justificación para resolver el siguiente problema:

TRABAJO EN EQUIPO

Jaime, Sonia y Verónica son amigos y cada uno vive en un pueblo.

Uno vive en Puebla, que tiene 150 habitantes; otro en Pinomar, que tiene 420 habitantes; y otro en Aguafría, que tiene 500 habitantes.

Observa la tabla y lee lo que dice Jaime. Después, averigua en qué pueblo vive cada uno.



La única técnica que se presenta –en lo referido al tanto por uno- es el cuarto proporcional, la cual está previamente justificada por la definición de razón entre dos números, la definición de proporción como igualdad entre razones y la constante de proporcionalidad.

Para calcular el **cuarto proporcional** formamos dos fracciones equivalentes con tres datos y la incógnita.

Magnitud 1		Magnitud 2
a	$\longrightarrow$	c
b	$\longrightarrow$	x

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

$$a \cdot x = b \cdot c \rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

En cuanto a la técnica de los porcentajes o tanto por ciento, la técnica que se emplea es la siguiente:

Para calcular el **tanto por ciento** de una cantidad, multiplicamos el tanto por la cantidad y lo dividimos entre 100.

$$t\,\%\text{ de } C = \frac{t \cdot C}{100}$$

Dicha técnica no viene acompañada de una justificación previa que le dé significado -definición de porcentaje como fracción o bien porcentaje como proporción-

No obstante, se muestra una tabla en la que esta explicado implícitamente debido a la selección de los datos numéricos. Véase en la siguiente imagen:

EJEMPLO

10

Expresión	%	Significa	Fracción	Valor	Se lee
El 55 % de la población son mujeres	55 %	De cada 100 habitantes 55 son mujeres	$\frac{55}{100}$	0,55	Cincuenta y cinco por ciento
Rebajas del 30 %	30 %	De cada 100 € de compra nos descuentan 30 €	$\frac{30}{100}$	0,30	Treinta por ciento
Rebajas del 40 %	40 %	De cada 100 € de compra nos descuentan 40 €	$\frac{40}{100}$	0,40	Cuarenta por ciento
Efectividad en tiros de tres puntos del 9 %	9 %	De cada 100 tiros lanzados se encestan 9	$\frac{9}{100}$	0,09	Nueve por ciento

El siguiente apartado del libro -posterior a la enseñanza de la técnica del cuarto proporcional - trata sobre la resolución de problemas que involucran magnitudes directa e inversamente proporcionales. Se plantean problemas en lo que los alumnos no han de diferenciar entre magnitudes que tienen una relación de proporcionalidad y las que no, sino problemas en lo que los datos involucrados siguen dicha relación y por tanto, no se requiere de una reflexión previa sobre el comportamiento proporcional de las magnitudes.

Las definiciones que se muestran sobre magnitudes directamente e inversamente proporcionales son las siguientes:

3.1. Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes **son directamente proporcionales** si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por ese mismo número.

Sean A y B dos magnitudes con los valores:

Magnitud A	a_1	a_2	a_3	...	m
Magnitud B	b_1	b_2	b_3	...	n

Si al formar razones con los valores de ambas magnitudes, la constante de proporcionalidad es siempre la misma,

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{m}{n} = k$$

las magnitudes A y B son directamente proporcionales.

3.2. Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes **son inversamente proporcionales** si al multiplicar o dividir uno de los valores de una magnitud por un número, el valor correspondiente de la otra magnitud queda dividido o multiplicado por el mismo número.

Sean A y B dos magnitudes con los valores:

Magnitud A	a_1	a_2	a_3	…	m
Magnitud B	b_1	b_2	b_3	…	n

Si al formar las razones de las proporciones se cumple que:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1},\ \frac{a_2}{a_3} = \frac{b_3}{b_2} \rightarrow a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = \ldots = m \cdot n$$

las magnitudes A y B son inversamente proporcionales.

En este caso, el presente libro toma como una técnica la tabla de proporcionalidad para diferenciar si las magnitudes que se comparan son directa o inversamente proporcionales.

En lo referido a los campos de problemas presentados por el Libro de Santillana, se plantean ejercicios y problemas a lo largo del capítulo con el objetivo principal de practicar las técnicas recientemente enseñadas. Asimismo, al final del tema también se propone al alumno una lista de campos de problemas. Veamos cuáles son los campos de problemas que se trabajan.

Al establecer la definición de razón como justificación de la técnica del cuarto proporcional, el presente libro propone problemas que traten la búsqueda de la razón:

Ejercicios

1. La razón entre 15 y 20 es: $\frac{3}{10}, \frac{15}{20}, \frac{3}{4}$. Elige las dos respuestas correctas.
2. El coche de mi padre consume 10 litros cada 100 km. Calcula la razón entre el número de litros consumidos y los kilómetros que se recorren.
3. Escribe dos números cuya razón sea $\frac{2}{5}$ y que no sean 2 y 5.
4. El precio de una llamada telefónica es de 3 céntimos el minuto. Halla la razón entre el precio de la llamada y el tiempo en segundos.

Hacer hincapié en el Ejercicio 1 el cual propone la búsqueda de una única razón entre dos valores numéricos que no tienen asociado magnitudes. No obstante en el Ejercicio 2, los valores numéricos si tienen asociado las magnitudes. Aun así, dicho problema no alude a una reflexión por parte del alumno sobre los motivos por los que se puede construir la razón: los litros de gasolina y los kilómetros recorridos son magnitudes, además son directamente proporcionales (la cantidad de litros consumidos es constante por cada kilómetro recorrido).

Por añadidura, se muestra una evaluación sobre los campos de problemas que incluyen y los que no. El total de problemas y ejercicios que plantea el libro en este capítulo son 96.

Ejercicios para aplicar las técnicas:

- Construcción de razón y de proporción como igualdad de razones: 31 ejercicios (**32.3%**)
- Comprobación si las magnitudes son directamente o inversamente proporcionales mediante tablas de proporcionalidad: 5 ejercicios (**5,2%**)
- Cálculo del cuarto proporcional: 16 ejercicios (**16,67%**)
- Cálculo de porcentajes: 14 ejercicios (**14,58%**)

Problemas de valor perdido: 9 (cuarto proporcional)+21 (tanto por ciento)=30 (**31,25%**)

Problemas de comparación cualitativa: 0 (**0%**)

Problemas de comparación cuantitativa: 0 (**0%**)

Problemas de predicción cuantitativa: 0 (**0%**)

Problemas para distinguir qué valores representan una cantidad de magnitud y los que no: 0 (**0%**)

Problemas en los que tengan que reflexionar sobre la relación de proporción, en caso de que haya: 0 (**0%**)

Libro de Anaya:

En el caso del libro de Anaya, presenta el capítulo planteando problemas de repaso que servirán para abordar los campos de problemas del mismo. Dicho problemas de repaso son problemas básicos de aritmética (calcular el valor de varios conociendo el valor de uno, y viceversa, calcular el valor de uno conociendo el valor de varios), construcción de fracciones equivalentes y el paso de fracción a decimal.

Se da comienzo al capítulo diferenciando entre magnitudes directa e inversamente proporcionales. Para ello, hace la siguiente introducción

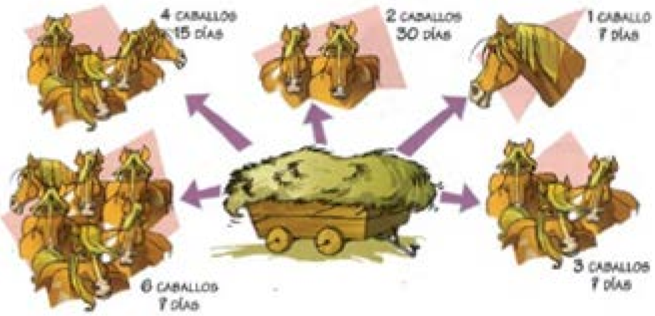
Llamamos magnitud a cualquier cualidad de los objetos que se pueda medir. Así, la longitud, el peso o el precio son magnitudes. A veces, entre las magnitudes se dan relaciones muy útiles para la resolución de problemas, como la relación de proporcionalidad que vas a estudiar ahora en sus dos modalidades: directa e inversa.

Con este breve párrafo introductorio, sí se alude a que no todo es magnitud, sino sólo aquello que se puede medir. Asimismo, menciona que hay situaciones en las que las magnitudes se relacionan proporcionalmente y otras que simplemente están relacionadas, pero no proporcionalmente. Sin embargo, a lo largo del capítulo no se incide en que el alumno reflexione sobre dicha distinción.

Las definiciones para magnitudes directa e inversamente proporcionales que emplea el presente libro evaluado respectivamente:

Relación de proporcionalidad inversa

Reflexiona, ahora, sobre la relación que existe entre el número de caballos que tiene un granjero y los días que le dura una carga de heno.



Observa que cuantos *más* caballos hay en la granja *menos* dura la carga de heno; y cuantos *menos* sean los caballos *más* dura la carga de heno.

La relación existente entre las dos magnitudes (el número de caballos y el número de días que dura el heno) nos permite completar los valores de la tabla siguiente:

N.º DE CABALLOS	4	2	1	3	6
N.º DE DÍAS	15	30	60	20	?

Diremos que esta relación es de proporcionalidad inversa.

Dos **magnitudes** son **inversamente proporcionales** cuando:
- Al multiplicar una (doble, triple, ...), se divide la otra (mitad, tercio, ...).
- Al dividir una (mitad, tercio, ...), la otra se multiplica (doble, triple, ...).

En cuanto a las técnicas, emplea siete en total. Tres para la resolución de problemas que involucren magnitudes directa e inversamente proporcionales (la reducción a la unidad, la regla de tres y la tabla de proporcionalidad-lo plantea como fracciones equivalentes en la tabla de valores-) y cuatro técnicas para el cálculo de porcentajes.

En este libro de Anaya, se presentan los porcentajes de dos maneras, como fracción y como proporción:

Un tanto por ciento equivale a una fracción que tiene por numerador el tanto y por denominador 100. $\Big\}\ a\,\% \longleftrightarrow \dfrac{a}{100}$

Para un determinado tanto por ciento, tomado sobre diferentes cantidades, **cada cantidad es directamente proporcional a su porcentaje correspondiente.**

En este último caso, los porcentajes, tres técnicas se refieren al porcentaje como proporción: cálculo de la parte, cálculo del total y cálculo del tanto por ciento y una última técnica para el cálculo de los aumentos y disminuciones porcentuales. Aunque considero estas cuatro técnicas diferentes a las anteriores, este libro de texto las resuelve como la regla de tres.

El libro presenta 103 problemas y ejercicios en el capítulo de proporcionalidad aritmética, de los cuales son:

Ejercicios para aplicar una de las técnicas explícitamente:

- Comprobación si las magnitudes son directamente o inversamente proporcionales mediante tablas de proporcionalidad: 5 ejercicios (**4,86%**)
- Reducción a la unidad: 2 (MDP[1]) + 2 (MIP[2])=4 (**3,88%**)

Resuelve por reducción a la unidad: Tres kilos de manzanas cuestan 3,75 €. ¿Cuánto cuestan 4 kilos?

KILOS		EUROS
3	$\longrightarrow$	3,75
1	$\longrightarrow$	?
4	$\longrightarrow$	?

- Regla de Tres: 3 (MDP) +1 (MIP)= 4 (**3,88%**)

4 Calcula x en cada caso, como en el ejemplo:

- $\frac{4}{6} = \frac{14}{x} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 14}{4} = 21$

a) $\frac{1}{3} = \frac{5}{x}$ b) $\frac{6}{9} = \frac{10}{x}$ c) $\frac{2}{6} = \frac{5}{x}$

d) $\frac{5}{6} = \frac{7}{x}$ e) $\frac{10}{12} = \frac{4}{x}$ f) $\frac{5}{3} = \frac{1}{x}$

g) $\frac{1,2}{3} = \frac{0,6}{x}$ h) $\frac{1,6}{0,8} = \frac{1}{x}$ i) $\frac{0,5}{0,6} = \frac{7,5}{x}$

5 Resuelve con una regla de tres: Si 100 g de salmón ahumado cuestan 2,40 €, ¿cuánto costarán 260 g?

GRAMOS		EUROS
100	$\longrightarrow$	2,40
250	$\longrightarrow$	x

- Cálculo de porcentajes: 23 ejercicios (**22,33%**)

[1] MDP: Magnitudes Directamente Proporcionales.
[2] MIP: Magnitudes Inversamente Proporcionales.

Problemas de valor perdido sin especificar la técnica: 28 (MDP/MIP)+36 (tanto por ciento) =64 (**62,14%**)

Problemas de comparación cualitativa: 0 (**0%**)

Problemas de comparación cuantitativa: 0 (**0%**)

Problemas de predicción cuantitativa: 0 (**0%**)

Problemas para distinguir qué valores representan una cantidad de magnitud y los que no: 0 (**0%**)

Problemas en los que tengan que reflexionar sobre la proporción de magnitudes, en caso de que haya: 3 (**2,91%)**

Apuntes de Marea Verde:

El tercer libro a evaluar son los Apuntes de Marea Verde[3]. La secuenciación que presenta sobre la proporcionalidad aritmética está dividida en tres apartados:

1. Diferencia entre razón y proporción.
2. Magnitudes directamente proporcionales
    (a) Proporcionalidad directa.
    (b) Regla de tres directa.
    (c) Porcentajes
3. Escalas: planos y mapas.

El presente libro presenta como razón de ser de la proporcionalidad aritmética la escala de un mapa o de una foto. Además, difiere con el libro de texto de Santillana y de Anaya, en que no presenta las magnitudes inversamente proporcionales, sino que las deja para el siguiente curso. Más aún, según como esta secuenciado el capítulo, el cálculo de porcentajes lo relaciona con magnitudes directamente proporcionales.

Haciendo una evaluación pormenorizada de la secuencia didáctica, se presenta la razón y la proporción (igualdad entre razones) como una justificación a la técnica que se va a emplear, es decir, la regla de tres. Sin embargo, sí hace una pequeña mención de que se puede usar la técnica de la reducción a la unidad.

[3] [3] http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/1ESO.htm
Un grupo de profesores de la enseñanza pública han elaborado apuntes gratuitos y están colgados en Internet. Hay apuntes para el profesor y para el alumno de todos los niveles de Secundaria y Bachillerato. Los libros o apuntes que presenta la página web están ajustados al currículo de la Comunidad Autónoma de Madrid.

La **regla de tres** es otro procedimiento para calcular el cuarto término de una proporción

Ejemplo:

- Con dos kilos de pienso mis gatos comen durante 6 días. ¿Cuántos kilos necesitaré para darles de comer 15 días?

Formamos la proporción ordenando los datos: $\frac{2\,kg}{x\,kg} = \frac{6\,días}{15\,días} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 15}{6} = 5\,kg$

Otra forma habitual de plantear la regla de tres es situando los datos de esta forma:

2 kg ———— 6días $\qquad x = \frac{2 \cdot 15}{6} = 5\,kg$

x kg ———— 15 días

Ideas claras

En la **regla de tres directa** ordenamos los datos de forma que el valor desconocido se obtiene multiplicando en cruz y dividiendo por el tercer término.

Reducir a la unidad significa calcular el valor de uno para poder calcular cualquier otra cantidad.

Un aspecto destacable tras la evaluación de este libro, es que inicialmente define la razón de esta forma:

Sin embargo, los términos de **una razón** se refieren a cantidades de **dos magnitudes**, el primero se llama "antecedente" y el segundo "consecuente"

Apoyándose en el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

- La razón que relaciona el gasto de 4 personas y los 200 litros de agua que gastan en un día, puede escribirse:

$$\frac{\mathbf{4}\ personas}{\mathbf{200}\ litros} \text{ o bien } \frac{\mathbf{200}\ litros}{\mathbf{4}\ personas}$$

Como veremos en el Apartado E esta forma de construir la razón es el método chino o razón externa. Dicho de otra manera, el método chino construye la razón de forma que relaciona dos cantidades de magnitudes diferentes, en este caso personas y litros.

Volviendo al ejemplo mostrado previamente en el que se muestra la resolución mediante la regla de tres, se construyen dos razones: una razón para los kilogramos y otra razón para los días. Ahora las razones relacionan cantidades de la misma magnitud (kilogramos con kilogramos y días con días). Es decir, se construye una proporción para igualar la razón de los kilogramos y la razón de los días. Este método de construcción de la razón es el método griego o también conocido como razón interna. (Apartado E)

En otras palabras, el libro de texto define la relación entre diferentes magnitudes a través de la razón externa, pero para la resolución de los problemas construye la razón interna.

Por consiguiente, el concepto de razón no solo no queda bien definido, sino que la definición y su aplicación son contradictorios y por tanto, fomenta un alto grado de confusión en los alumnos a la hora de aprender este nuevo objeto matemático.

La regla de tres del ejemplo, mediante la construcción de la razón externa sería:

$$\frac{2\ Kg}{6\ días} = \frac{x}{15\ días}$$

Volviendo a la evaluación del libro, no se muestran ejemplos o se proponen ejercicios en los que el alumno deba reflexionar sobre la existencia o no de proporcionalidad entre pares de magnitudes. Tampoco se evalúa qué es magnitud.

En cuanto a las técnicas, hay dos: la regla de tres y otra para el cálculo de porcentajes.

Ejemplo:

Calcula el 23 % de 800   El 23 % de 800 = $\frac{23 \cdot 800}{100} = 184$

En cuanto a los campos de problemas se proponen 59 problemas y ejercicios en total, de los cuales:

Ejercicios para aplicar las técnicas:

- Construcción de razón y de proporción como igualdad de razones: 18 ejercicios (**30,51%**)
- Cálculo de porcentajes: 10 ejercicios (**16,95%**)

Problemas de escalas: 4 (**6.78%**)

Problemas de valor perdido: 13(tanto por uno)+7 (tanto por ciento) =20 (**33.9%**)

Problemas de comparación cualitativa: 1(**1,7%**)

Problemas de comparación cuantitativa: 3 (**5,08%)**

Problema de predicción cuantitativa: 1(**1,7%**)

29. En el antiguo Egipto, para definir la proporción de las diferentes partes del cuerpo, se usaba la longitud de los dedos y para el canon, los puños. Una cabeza debía medir dos puños. Los griegos utilizaban, al igual que los egipcios, la proporción para valorar los distintos cánones de belleza. Un cuerpo bien proporcionado debía tener una longitud proporcional a la cabeza. Alguno de los más conocidos corresponden a famosos escultores:

	Canon de Praxíteles	Canon de Polikletos	Canon egipcio
Medida del cuerpo	Ocho cabezas	Siete cabezas	16 puños

Con estos datos puedes investigar sobre qué proporción es la más frecuente entre tus amigos

Problemas para distinguir qué valores representan una cantidad de magnitud y los que no: 0 (**0%**)

Problemas en los que tengan que reflexionar sobre la relación de proporción, en caso de que haya: 2 (**3,38%**)

Desde una visión general, Martínez, Muñoz y Oller (2015) han analizado el tema de proporcionalidad aritmética en diferentes colecciones de libros de texto apoyándose también en otras investigaciones (Shield y Dole, 2013; Oller y Gairín, 2012) y concluyen que los propios libros de texto no promueven el conocimiento profundo del razonamiento proporcional y la relación de proporcionalidad de sus alumnos debido a que se centran demasiado en los procedimientos.

El estudio de Escolano y Gairín (2009) examinó los errores cometidos por los alumnos en la resolución de problemas de este tópico matemático. En primer lugar, observaron que los estudiantes no entendían cómo han de relacionarse las magnitudes, es decir, las condiciones que deben de cumplir para que se pueda establecer una relación de proporcionalidad entre ellas. Asimismo, debido a que la *razón*[4] es presentada como una unidad no medida entre dos cantidades de magnitud diferentes, y la enseñanza no atiende a la unidad de medida resultante, los estudiantes no controlan el manejo de las magnitudes que se están utilizando.

En cuanto a la constante de proporcionalidad, es presentada en los libros de texto mediante tablas de valores, pero no se emplea para justificar determinadas técnicas que favorecen el entendimiento del razonamiento proporcional. Por otro lado, el concepto de proporción es mostrado como la igualdad entre fracciones numéricas y no como la igualdad entre razones que relacionan cantidades de magnitudes diferentes. Como consecuencia, los estudiantes no alcanzan la suficiente comprensión sobre el concepto de proporción.

[4] Explicada con detalle en el apartado D.

En relación con los métodos enseñados para resolver los campos de problemas tales como la regla de tres, transforman los datos contextualizados iniciales del problema en datos descontextualizados. Dicho de otra manera, estas técnicas no muestran las operaciones realizadas explícitamente, de hecho carecen de sentido. Véase en el siguiente ejemplo extraído de un libro de texto (Apuntes de Marea Verde)

Ejemplo:

- Con dos kilos de pienso mis gatos comen durante 6 días. ¿Cuántos kilos necesitaré para darles de comer 15 días?

Formamos la proporción ordenando los datos: $\frac{2\,kg}{x\,kg} = \frac{6\,días}{15\,días} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 15}{6} = 5\,kg$

Otra forma habitual de plantear la regla de tres es situando los datos de esta forma:

2 kg ———— 6días

x kg ———— 15 días

$$x = \frac{2 \cdot 15}{6} = 5\,kg$$

Este ejercicio, según el autor está resuelto de dos formas diferentes, mediante proporción y regla de tres. La proporción planteada en este ejemplo no deja de ser una técnica a memorizar similar a la regla de tres, debido a que la construcción de igualdad entre razones, tal y como he mencionado previamente es contradictorio. Además, ambas técnicas llevan acompañadas operaciones que carecen de sentido, tales como, $2 \cdot 15 = 6 \cdot x$ ¿cuál es el significado de $2 \cdot 15$?

Es por esto que los estudiantes pierden la noción de qué operaciones están realizando al aplicar dichas técnicas favoreciendo a que la resolución de problemas sobre proporcionalidad aritmética sea un mero automatismo a la hora de aplicar la técnica enseñada. La investigación de Cramer y Post (1993) propuso la resolución de un problema de proporcionalidad aritmética a un grupo de alumnos que conocían la regla de tres y otro grupo que no. Se observó que casi un 30% de los alumnos que conocían la regla de tres la aplicaron de forma incorrecta y por tanto, obtuvieron un resultado erróneo. En cambio el grupo de alumnos que no conocían la regla de tres, recurrieron a otras estrategias intuitivas para resolverlo obteniendo el resultado correcto.

Esto induce a pensar que el método de la regla de tres no implica la adquisición del razonamiento proporcional y es por ello, que se debe enseñar estrategias con los que lo adquieran. Dicho esto, esta memoria está basada en la resolución de problemas de proporcionalidad aritmética directa a través de la reducción a la unidad empleando para ello la razón externa entre pares de cantidades de magnitudes. –razón en tanto por uno y razón en tanto por ciento (porcentajes)-.

C. Sobre los conocimiento previos del alumno.

Para que el alumno afronte el aprendizaje de la proporcionalidad aritmética en el primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria es necesario que tenga asentados algunos conocimientos previos, algunos de ellos adquiridos en cursos anteriores y otros que sean objeto de nueva enseñanza.

Para los campos de problemas que se plantean en esta propuesta didáctica, los alumnos necesitan saber:

- Paso de fracción a decimal y viceversa.
- Manejo de fracciones equivalentes.
- Comprender los diferentes significados de "*fracción*". Por un lado entender el concepto de fracción como una acción de fraccionar (dividir en partes iguales y seleccionar algunas de ellas) y por otro lado, entender la fracción como la razón, medida, comparación entre cantidades de magnitudes diferentes..
- Diferenciar la razón aditiva y razón multiplicativa de las fracciones. Los alumnos, debido a su desarrollo cognitivo presentan errores relacionados con la estructura aditiva o multiplicativa de las fracciones. Esto se debe a que confunden los conocimientos de cálculo de los naturales con el de las fracciones.

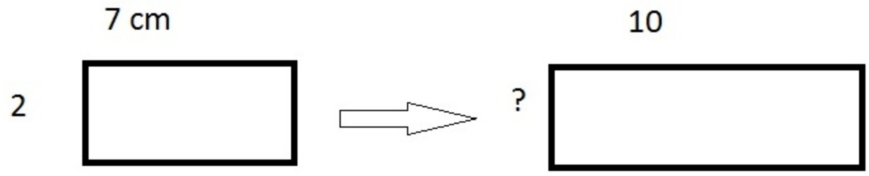
$$\frac{2}{3}+\frac{6}{4}=\frac{8}{7}$$

Por otro lado, los alumnos también cometen errores al trabajar con la equivalencia de fracciones. La fracción es considerada como un par de números naturales que no están relacionadas entre sí:

$$\frac{3}{4}=\frac{8}{9}=\frac{15}{16}$$

El argumento de esta deducción está centrado en la adición de los numeradores que se traslada a los denominadores. Este error común se puede ver en siguiente ejemplo:

Sea un rectángulo de 7 cm de largo y 2cm de ancho. Si aumenta 3 cm de largo, ¿cuánto tendrá que aumentar la longitud de su ancho para que sean rectángulos proporcionales?



Los alumnos en vez de buscar una relación proporcional (razón multiplicativa) entre el largo y el ancho del cuadrado, utilizan la razón aditiva. Es decir, como al largo le hemos añadido 3 cm, entonces al ancho también. Como consecuencia de este razonamiento, su respuesta sería 5 cm, en vez de:

El rectángulo tiene $\frac{2}{7}$ *cm de ancho por cada cm de largo, entonces si el rectángulo tiene* 10 *cm de largo tendrá* $10 \cdot \frac{2}{7} = \frac{20}{7}$ *cm de ancho.*

Basándome en la Orden del 16 de Junio de 2014, de la Consejería de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por el que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, los estándares de aprendizaje que han adquirido los alumnos de 1ºESO durante el curso previo (6º Primaria) son, en cuanto al bloque de Números, ordenación de los números enteros, decimales, fracciones básicas por comparación, representación en la recta numérica y transformación de unos en otros. Uso de los porcentajes para expresar partes, establecer la correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes, cálculo de aumentos y disminuciones porcentuales. En lo referido a los problemas de proporcionalidad, los alumnos habrán aprendido a resolver problemas de proporcionalidad directa a través de la regla de tres. Por otro lado, en cuanto al bloque de Medida del sexto curso de primaria y el bloque de Números del primer curso de Educación Secundaria, los alumnos habrán aprendido el Sistema Métrico Decimal.

Es decir, para ellos las únicas unidades de medida son las descritas por dicho sistema. Asimismo, para los alumnos la forma de medir refiriéndose a las fracciones es la parte y el todo. Para esta propuesta didáctica los alumnos aprenderán que hay diferentes formas de medir, además de las unidades del sistema métrico decimal.

Con esta propuesta didáctica se pretende que los alumnos pasen de entender la fracción como el concepto de seleccionar "*parte*" de un "*todo*" divido en partes iguales al concepto de razón como medida e índice de comparación entre cantidades de magnitudes diferentes.

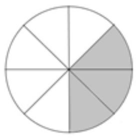
Es de esperar que los alumnos encuentren un obstáculo didáctico en el paso de fracción entendida como “parte-todo” a razón. Más aún, destacar que la diferencia entre ambos conceptos no tiene una división clara, pues en ocasiones se produce un solapamiento entre significados.

La siguiente tabla muestra las diferencias y similitudes entre la fracción entendida como parte-todo (concepto ya conocido por los alumnos) y como razón (objeto matemático de nueva enseñanza).

<table>
<tr><th>Uso de fracción como “parte-todo”</th><th>Uso de la fracción como “razón”</th></tr>
<tr><td>

Medir:

- ✓ Dividir un objeto en partes iguales y seleccionar algunas partes.



- ✓ Seleccionar objetos a partir de una colección de los mismos.

</td><td rowspan="2">

Medida/Relación de comparación:

Razón: índice comparativo entre una o dos cantidades de magnitudes.

- PARTE-PARTE / Razón externa: compara cantidades de diferentes magnitudes

Ej*:* 30 *chocolatinas me cuestan* 6€*.*

$\frac{6}{30}$ *€ cuesta 1 CHOCOLATINA o bien, también se puede construir la razón inversa*

$\frac{30}{6}$*chocolatinas me puedo comprar con 1 EURO*

- PARTE-TODO / Razón interna: compara cantidades de la misma magnitudes (expresada en las mismas unidades)

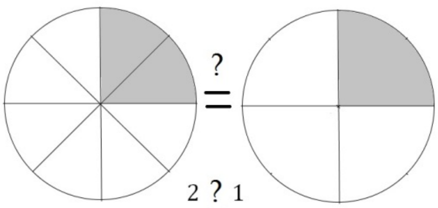
Ej: *De* 20 *alumnos que están inscritos en 1º de ESO,* 15 *de ellos no asisten a clase.*

$\frac{15}{20}$ *alumnos faltan a clase por cada alumno que está inscrito. La razón* $\frac{20}{15}$ *determina los alumnos que están inscritos por cada alumno que falta.*

</td></tr>
<tr><td>

Comparar:

<u>Cantidades de una misma magnitud</u> (parte /todo):



$\frac{2}{8} \stackrel{?}{=} \frac{1}{4}$

</td></tr>
</table>

Operaciones implicadas:	**Operaciones implicadas**
✓ Equivalencia de fracciones. ✓ Paso de fracción a decimal (dividir numerador entre denominador)	✓ Equivalencia de fracciones (la proporción entre razones) ✓ Paso de fracción a decimal. (fracción como concepto de razón)

Debido a que esta propuesta está destinada a los alumnos de primero de Educación Secundaria, es de esperar que en el curso de sexto de Educación Primaria se hayan visto los contenidos establecidos en currículo de ese año. No obstante, no siempre es así, así que se plantea una prueba de diagnóstico sobre los conocimientos previos de las fracciones de los que parten los alumnos. En función de lo observado en dicha prueba de evaluación inicial, se empleará más tiempo al repaso de estos conocimientos previos.

Actividad 1: Prueba de diagnóstico

EJERCICIO 1: Indica qué fracciones son menores o mayores que la unidad.

$$\frac{2}{5}, \quad \frac{8}{7}, \quad \frac{25}{28}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{6}{5}$$

EJERCICIO 2: Pasa a decimal las siguientes fracciones:

a) $\frac{5}{8}$

b) $\frac{100}{16}$

c) $\frac{2}{3}$

EJERICIO 3: Pasa los siguientes decimales a fracciones.

a) 0.75

b) 4.32

c) 5.008

EJERCICIO 4: Ordena las siguientes fracciones:

$$\frac{6}{5}, \quad \frac{6}{7}, \quad \frac{5}{7}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{15}{30}, \quad \frac{6}{12}$$

EJERICCIO 5: He pagado 5 € por dos cuadernos en una copistería. ¿Cuánto cuesta cada cuaderno? ¿Cuánto me costarán 7 cuadernos?

EJERCICIO 6: En esa misma copistería me han cobrado 1.80 € por hacer 36 fotocopias, ¿Cuánto cuesta 1 fotocopia? ¿Cuántas fotocopias puedo hacer con 1 €?

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático.

Cuando se habla de proporcionalidad, se refiere a la relación existente entre dos cantidades de magnitud. Dependiendo de esta relación se pueden dar diferentes casos de proporcionalidad. El principal objetivo de esta propuesta didáctica es la adquisición del razonamiento proporcional directo entre dos cantidades de magnitud y la resolución de problemas cuyas operaciones no descontextualicen los datos y pierdan su sentido. Dicho de otra manera, que los alumnos no automaticen técnicas para la resolución de problemas de proporcionalidad aritmética, sino que adquieran estrategias que favorezcan el razonamiento proporcional y que las técnicas a emplear muestren explícitamente las operaciones entre datos contextualizados.

Para poder elaborar esta propuesta didáctica es de gran utilidad conocer su fundamento histórico ya que este tipo de razonamiento fue definido por diferentes matemáticos a lo largo de la historia y las dificultades que encontraron para ello.

Los autores Ollén y Gairín (2013) estudiaron la evolución histórica de los principales conceptos relacionados con la proporcionalidad aritmética: razón y proporción. Más aún, del origen de ambos conceptos y su proceso de aritmetización.

Dichos autores encontraron los primeros intentos de fundamentación teórica en dos textos: Los *Elementos* de Euclides (s.III a.n.e) y un texto *Jiu Zhang suan shu* del matemático chino Liu Hui (s.III).

Los problemas que involucran el tema de proporcionalidad aparecen en nuestros quehaceres cotidianos, lo mismo les ocurría a nuestros antepasados. Remontándonos al s.II (a.n.e), los problemas de mercancías o repartos proporcionales ya aparecían en textos chinos, hindúes. Dichos problemas eran resueltos a través de técnicas, similares a las actuales, las cuales no tenían un significado teórico. Es por ello, que tanto Euclides como Liu Hui intentaron aportar una base teórica a la resolución de problemas de proporcionalidad aritmética.

En primer lugar, el libro de *Los Elementos* de Euclides, aunque si define el concepto de razón, algunos autores no creen que sea una definición clara y concisa puesto que no deja claro cómo se ha de operar entre razones. Simplemente niega que la razón sea un número, pero que a la vez es una forma de relacionar el tamaño entre dos magnitudes. La definición euclidiana de razón es la siguiente:

"*una razón es una determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas*". Además "*guardan razón entre sí las magnitudes que, al* *multiplicarse pueden exceder una a otra*". Asimismo, Euclides define la igualdad de razones como "*guardar la misma razón*" o bien "*guardar una razón mayor".*

Unos años más adelante, fue Eudoxo quien considero el concepto de razón desde un punto de vista geométrico, trató de definir a qué se refería Euclides con *"guardar la misma razón"* o "*guardar una razón mayor".* Su definición fue: "*una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente*". Esta definición fue un gran paso en estudio teórico de la proporcionalidad, pues aludía al empleo de diferentes tipos de magnitudes conmensurables o inconmensurables, algo que hasta ahora la razón solamente se podía calcular entre magnitudes homogéneas a través de un proceso llamado *antifairesis* o *antanairesis*[5] presentado también por Euclides en su libro de Los Elementos.

Para los griegos, no solo la razón se debía calcular entre magnitudes homogéneas, sino que su producto carecía de sentido. Dicho es así, que en el libro de Los Elementos aparecen dos definiciones de razón, una referida para los números ("*si cuatro números son proporcionales, el producto del primero y el cuarto será igual al del segundo y el tercero*") y otra para las magnitudes (*si cuatro rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por las extremas es igual*[18] *al rectángulo comprendido por las medias)* –la segunda definición se centra exclusivamente en rectas y ángulos-. Como consecuencia de que los griegos no concebían el producto entre magnitudes, encontraron imposible aplicar las bases teóricas a la práctica.

No se encontró una practicidad de la fundamentación teórica de la proporcionalidad hasta el momento en el que el matemático chino Lui Hui comentara la colección de problemas del libro *Los nueves Capítulos*. Su teoría sobre la proporcionalidad chocó con el pensamiento griego, por lo que algunos autores consideran que el testimonio de Lui Hui da comienzo al origen sobre una nueva teoría de la proporcionalidad. Lui definió un nuevo concepto: la *lü*. La *lü* es *"un conjunto de números correlacionados, que se pueden convertir unas en otras. Si hay fracciones en una lü, esta puede convertirse en otra en enteros multiplicando por un número adecuado. Las lü se pueden simplificar reduciéndolas usando el común denominador*"

[5] Actualmente denominado Algoritmo de Euclides.

(Oller y Gairín, 2013, p.328). Dicho de otra manera, una *lü* es un conjunto de los valores de determinadas magnitudes directamente proporcionales. Los autores del artículo del que basamos este apartado aluden a la interpretación de la definición de *lü* de Kangshen et al. (1999, p. 81) "*interpretan la razón entre dos magnitudes como su lü cuando una de ellas toma el valor 1*". El concepto de lü es lo que da origen a la técnica que conocemos como Regla de Tres.

La fundamentación teórica de Lui Hui sobre la proporcionalidad relaciona magnitudes directamente proporcionales distintas. Esto permite que tenga una fácil adaptación la fundamentación teórica en los problemas sobre proporcionalidad que relacionan magnitudes diferentes.

En cuanto al proceso de aritmetización de las razones, nos centramos en las aportaciones sobre la definición de razón de Ommar Al-Khayyan (s.XI) y de Giovanni Campano (s.XIII) al libro de los Elementos de Euclides (s.XI).

Ommar Al-khayyan se centró en el ámbito de las magnitudes y Campano en las razones numéricas.

Al-Khayyan redefinió el concepto de razón de Euclides de la siguiente manera: "*dos razones son iguales si ambos pares de magnitudes dan lugar a la misma sucesión de enteros tras el proceso del algoritmo de Euclides*". Aunque Al-Khayyan no define si la razón es numérica o no, si se centra en definir la composición entre razones, inicialmente de tres razones.

> *Dadas las magnitudes ay b se fija una unidad u y, entonces, por la existencia de la cuarta proporcional existe otra magnitud g tal que $g\!:\!u :: a\!:\!b$. Ahora, como u es la unidad, entonces g es un número que representa la razón $a\!:\!b$.*

Este argumento tiene una gran relevancia puesto que permite aplicar dicha definición a cualquier cantidad de magnitudes tal que así:

Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ *son magnitudes, la razón* $a1\!:\!an$ *es el resultado de componer* $a_1\!:\!a_2, a_2\!:\!a_3, \dots a_{n-1}\!:\!a_n$.

Campano, otro de los autores que estudiaron la aritmetización de la razón introdujo el concepto de "*denominación de razón*". Oller y Gairín (2013) han extraído la definición de Rommevaux (1999, pág. 97):

> *Se dice denominación de una razón, específicamente de un número más pequeño en relación a uno más grande, a la parte o las partes de ese [número] menor que están en*

el mayor. Y [de una razón] de un número más grande en relación a otro más pequeño, al múltiplo o al múltiplo y la parte o las partes según las cuales el mayor lo es.[6]

Campano asocia la razón con un número, pero no la identifica con un número: "*Se dicen semejantes a las razones que reciben la misma denominación, y más grande a la que [recibe] una más grande, y más pequeña a aquella que [recibe] una menor*."
Tal y como mencionan los autores, se trata de un tratamiento del concepto de razón similar al actual: "*Razón entre dos números a y b es el cociente* $\frac{a}{b}$"

Para finalizar con este apartado sobre las razones históricas de la proporcionalidad, Oller y Gairín (2013) añaden un apartado sobre cómo sería la resolución de un problema de proporcionalidad aritmética desde el punto de vista griego y chino. Debido a la relevancia de entender ambos enfoques teóricos se muestra un ejemplo comparando ambos:

Si 5 kilos de manzanas cuestan 2€, ¿Cuánto cuestan 6 kilos de manzanas?
<u>Resolución griega</u>: La razón se ha de construir a través de magnitudes homogéneas. Es decir, se ha de buscar un número que relacione la razón del precio de las manzanas y la razón del número de kilos de manzanas:

$$\frac{x}{2} = \frac{5}{6}$$

<u>Resolución china</u>: La razón se construye a partir de un par de magnitudes (no han de ser homogéneas), es decir, la razón dada por el número de kilos de manzanas y su precio, vendría dado por $\frac{2}{5}$. Igualando ambas razones se obtiene la siguiente proporción:

$$\frac{x}{6} = \frac{2}{5}$$

Ambas resoluciones son similares, pero para los griegos la segunda resolución carece de sentido ya que no se puede dividir el precio entre el número de kilos. Lo mismo ocurre con el enfoque griego para los chinos, también carece de sentido puesto que relaciona el número de kilos y su precio independientemente.

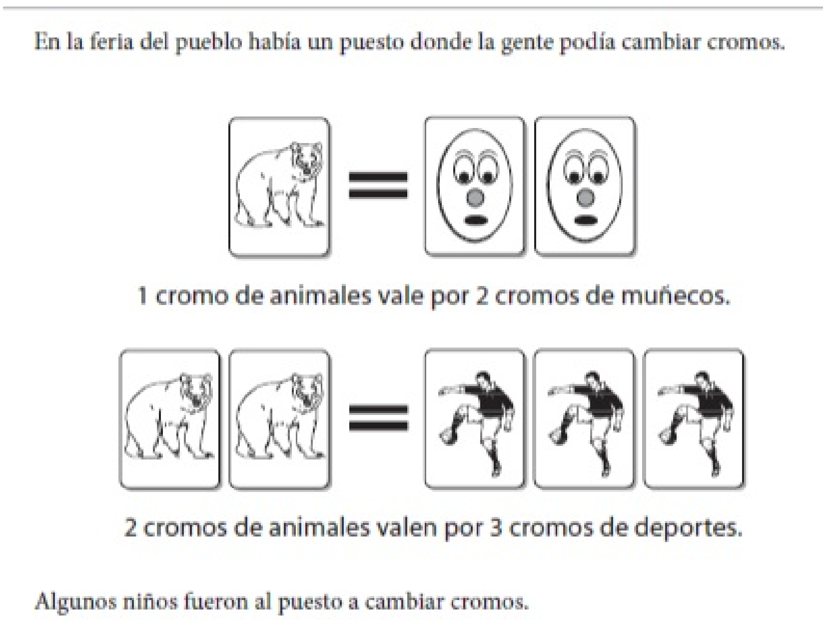
[6] "Tomemos por ejemplo la razón (29:8). El número de veces que 8 está en 29 es 3. Y hay cinco octavas partes de 8 en el resto 29 – 3 × 8 = 5. La denominación es pues tres y cinco octavas partes." Ejemplo extraído del artículo de Oller y Gairín (2013).

Las técnicas empleadas para la resolución de problemas en esta propuesta didáctica están basadas principalmente en la definición china de la razón –razón externa-, ya que nos permitirá hacer lo siguiente:

Comprar 12 *libros me cuesta* 170 €. La razón externa indica que 170/12 es la cantidad de euros que cuesta cada libro.

Los siguientes problemas servirán de introducción de este tópico matemático dando sentido a la posterior secuenciación de mi propuesta.

<u>Razón de ser nº 1</u>: Intercambio de Cromos[7]. Razón de ser para introducir la variación multiplicativa entre dos cantidades de magnitudes que están relacionadas.


En la feria del pueblo había un puesto donde la gente podía cambiar cromos.

1 cromo de animales vale por 2 cromos de muñecos.

2 cromos de animales valen por 3 cromos de deportes.

Algunos niños fueron al puesto a cambiar cromos.

[7] http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/recursos/pruebasliberadaspirls2011.pdf?documentId=0901e72b816484ba

A. Berta tenía 5 cromos de animales para cambiarlos por cromos de muñecos. ¿Cuántos cromos de muñecos obtendría?

Respuesta: _____________ cromos de muñecos.

B. Jaime tenía 8 cromos de animales para cambiarlos por cromos de deportes. ¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

Respuesta: _____________ cromos de deportes.

C. Catalina tenía 6 cromos de animales. Los quería cambiar por tantos como fuera posible.

¿Cuántos cromos de muñecos obtendría? _______________

¿Cuántos cromos de deportes obtendría? ________________

¿Debería cambiarlos por cromos de muñecos o por cromos de deportes?

Respuesta: _______________________________

Esteban tenía 15 cromos de deportes para cambiarlos por cromos de animales. ¿Cuántos cromos de animales obtendría?

Respuesta: _____________ cromos de animales.

Antonio tenía 8 cromos de muñecos para cambiarlos por cromos de deportes. ¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

Respuesta: _____________ cromos de deportes.

Razón der ser nº2: Razón de ser para comprender cuando no existe proporcionalidad y no se puede establecer una condición de regularidad entre pares de cantidades de magnitudes.

Indica en qué casos se puede establecer una condición de regularidad.

- *Si María mide* 1.20 *metros a los* 10 *años, ¿Cuánto medirá a los* 20 *años?*
- *Hoy hay una temperatura de* $21\ °C$ *en la calle y llevo en la cartera* 15 € *en total. ¿Qué temperatura hará cuando lleve* 30€ *en mi cartera?*
- *Por* 7 *bolsas de patatas me han cobrado* 3.5 € *¿Cuánto me costará* 1 *bolsa de patatas?*
- *Sara y Patricia pagaron* 14 € *por dos entradas de cine. La película duró una hora y media. ¿Cuánto hubiera durado la película si las dos entradas les hubiera costado* 7€ *?*

Razón de ser nº3: Razón de ser para conocer la condición de regularidad entre magnitudes relacionadas y la uniformidad en las unidades de las magnitudes involucradas. El objetivo de esta razón de ser es que tenga sentido relacionar magnitudes al hacer un reparto igualitario y por tanto calcular su razón. (Martínez, Oller y Pecharromán, 2013)

En una granja de vacas, el granjero tiene que ser previsor para asegurar la alimentación de todas sus vacas y los posibles beneficios. Para ello, ¿Qué magnitudes tiene que tener en cuenta?

- *El número de vacas que tiene.*
- *La ración diaria de pienso de cada oveja.*
- *El consumo diario de pienso de todas sus vacas.*
- *La cantidad de pienso que tiene almacenado en su granja.*
- *La cantidad de días que puede alimentar a todas las vacas con el pienso almacenado.*
- *El número de establos.*
- *La fecha del día de hoy.*

¿Qué magnitudes están relacionadas entre sí?

<u>Razón de ser nº4</u> Razón de ser para introducir el concepto de razón como tanto por uno.

En mi libro de cocina tengo una receta de arroz con verduras para 4 *personas. La cantidad de ingredientes que se ajustan a esta receta son:*

Arroz con verduras para 4 personas
200 gr de arroz
100 gramos de calabacín
125 gramos de tomate
150 gr de pimientos
1 cucharada de sal
2 cucharadas de aceite
3 dientes de ajo

Pero quiero hacer esta misma receta- que tenga el mismo sabor- para 1 *persona.*

- *Relaciona la cantidad de gramos de arroz con los de calabacín para que la receta mantenga el mismo sabor.*
- *Relaciona la cantidad de gramos de arroz con los de pimiento para que la receta mantenga el mismo sabor.*
- *Relaciona la cantidad de cucharadas de aceite con los dientes de ajo?*
- *¿Qué cantidad necesitaría de cada ingrediente para cocinar esta misma receta (con el mismo sabor) para* 5 *personas? Justifica detalladamente las operaciones que has realizado.*

¿Cómo sería la receta para 5 *personas?*

Esta razón de ser tiene el objetivo de convencer a los alumnos de que no es necesario ni conveniente utilizar la regla de tres. Como ya hemos visto, algunos alumnos habrán aprendido dicha técnica en el curso anterior, e intentarán utilizarla.

Es de esperar, según la lectura de algunas investigaciones ya mencionadas, la mayor parte de alumnos no se acuerden de cómo aplicar la técnica de la regla de tres. En el caso de que algún alumno lo recuerde y obtenga la solución numérica correcta, el alumno no sabrá justificar las operaciones que están involucradas en dicha técnica. Previniendo que ocurran estas dos posibles situaciones en el aula, con esta actividad pretendo convencerles de que “olviden” esta forma de resolución que aprendieron en el curso anterior; no tiene ninguna utilidad aprenderse una técnica de memoria sin entender las operaciones y además, no recordarla. Es por esto, que los alumnos han de estudiar nuevas estrategias para resolver con éxito este tipo de problemas.

<u>Razón de ser nº5</u>: Cambio de divisa[8]. Razón entre dos magnitudes. Razón como tanto por uno. Razón inversa. Problema de Valor perdido.

Mei-Ling, ciudadana de Singapur, estaba realizando los preparativos para ir a Sudáfrica como estudiante de intercambio durante 3 meses. Necesitaba cambiar algunos dólares de Singapur (SGD) en rands sudafricanos (ZAR).

Pregunta 11: EL TIPO DE CAMBIO M413Q01 - 0 1 9

Mei-Ling se enteró de que el tipo de cambio entre el dólar de Singapur y el rand sudafricano era de:

1 SGD = 4,2 ZAR

Mei-Ling cambió 3.000 dólares de Singapur en rands sudafricanos con este tipo de cambio.

¿Cuánto dinero recibió Mei-Ling en rands sudafricanos?

Respuesta: ....

Pregunta 12: EL TIPO DE CAMBIO M413Q02 - 0 1 9

Al volver a Singapur, tres meses después, a Mei-Ling le quedaban 3.900 ZAR. Los cambió en dólares de Singapur, dándose cuenta de que el tipo de cambio había cambiado a:
1 SGD = 4,0 ZAR
¿Cuánto dinero recibió en dólares de Singapur?

Respuesta: ....

Pregunta 13: EL TIPO DE CAMBIO M413Q03 - 01 02 11 99

Al cabo de estos 3 meses el tipo de cambio había cambiado de 4,2 a 4,0 ZAR por 1 SGD.

¿Favoreció a Mei-Ling que el tipo de cambio fuese de 4,0 ZAR en lugar de 4,2 ZAR cuando cambió los rands sudafricanos que le quedaban por dólares de Singapur? Da una explicación que justifique tu respuesta.

<u>Razón de ser nº6.</u> La finalidad de este problema es iniciar la comparación cuantitativa entre las razones como tanto por uno.

Voy al mercado a comprar agua mineral y hay tres ofertas que corresponden a marcas distintas.

Marca nº1: 1 *botella de agua mineral de* $\frac{3}{2}$ *litros cuesta* 2 *€.*

Marca nº2: 1 *botella de agua mineral de* $\frac{3}{4}$ *litros cuesta* 1 *€.*

Marca nº3: 6 *botellas de agua mineral de* $\frac{1}{5}$ *litros cuestan* 2*€ en total.*

¿Cuál es la oferta más barata? Justifica los pasos que realizas para la resolución del problema.

8 http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/pisa2003liberados.pdf?documentId=0901e72b801106c6

<u>Razón de ser nº 7:</u> El objetivo de este problema es introducir los porcentajes como razón en tanto por ciento.

Diego ha anotado la gente que ha ido a comprar a su tienda a lo largo del año. De cada 100 personas que entran a la tienda, 30 no compran nada, 15 compran solo un artículo y el resto se lleva más de uno. Expresa estas cantidades en razón como tanto por ciento y escríbelo como porcentaje.

Si a la tienda de Juan han entrado durante el año 9.000 personas, calcula el número de los que no han comprado nada, los que han comprado un artículo y los que han comprado más de uno.

E. Sobre el campo de problemas.

Para evitar los errores cometidos por los estudiantes que han sido evaluados por las investigaciones de Escolano y Gairín (2009), inicialmente han de manejar y diferenciar qué son magnitudes para afrontar el aprendizaje de la proporcionalidad aritmética. Además Martínez, Muñoz, Oller y Pecharromán (2015), mencionan que la resolución de problemas se centra desde un punto de vista numérico despreocupándose del manejo de magnitudes.

En segundo lugar, analizar si dos cantidades de magnitudes se sitúan en el mismo campo de proporcionalidad. Un par de magnitudes se situarán en el mismo campo de proporcionalidad si el contexto así lo permite (p.ej. número de vacas y cantidad de pienso en una granja, número de alumnos y número de profesores en un mismo instituto, etc…).

En tercer lugar, analizar cuando las expresiones numéricas se pueden relacionar (solo si existe una condición de regularidad entre magnitudes) y si esa relación es de proporcionalidad directa. Se muestran los siguientes ejemplos:

- El número de una casa y el número de personas que viven en ellas no se pueden relacionar proporcionalmente. El número de una casa es un código que no indica una cantidad de magnitud.
- El código postal de un barrio de la ciudad de Zaragoza y el número de habitantes que viven en dicho barrio tampoco se pueden relacionar proporcionalmente.

Teniendo lo anterior descrito en cuenta, los campos de problemas que se proponen son (Martínez, Muñoz, Oller y Pecharromán, 2015):

<u>Problemas cualitativos:</u>

- Problemas de predicción y comparación. (CPNº1)
- Problemas sobre el análisis de expresiones numéricas, es decir, problemas en los que se relacionen magnitudes, en los que no se relacionen e incluso que las cantidades involucradas no sean magnitudes. Distinguir las parejas de magnitudes directamente proporcionales. Establecer la condición de regularidad entre las magnitudes que se relacionan (CPNº2).

Problemas cuantitativos:

- Razón entre dos magnitudes: razón como tanto por uno. Razón como resultado de un reparto igualitario. Razón inversa. (CPNº3)
- Problemas de valor perdido con MDP (CPNº4)
- Problemas de comparación entre magnitudes directamente proporcionales. (CPNº5)
- Problemas de repartos directamente proporcionales (CPNº6)
- Problemas de proporcionalidad compuesta directa-directa (CPNº7)
- Porcentajes: razón como tanto por ciento. Cálculo de porcentajes de un cantidad, incluyendo problemas de valor perdido, cálculo de la parte, cálculo del total y aumentos y disminuciones porcentuales (CPNº8).

A continuación se muestra el planteamiento más detallado de los campos de problemas a presentar en el aula.

PROBLEMAS CUALITATIVOS

CAMPO DE PPROBLEMAS Nº1: Problemas de predicción y comparación cualitativa: sólo se conoce la relación de orden entre las cantidades de las magnitudes correspondientes en ambas situaciones y no su valor exacto.

Problema 1.1: Raquel está cocinando un bizcocho. Dos de los ingredientes que lleva el bizcocho es azúcar y sal. Las cantidades de azúcar y sal deben ser las justas, es decir, las que están escritas en el libro de cocina. Si Raquel echa más azúcar a la receta ¿Cómo estará el bizcocho? Si echa menos azúcar ¿Cómo estará el bizcocho ahora? Si echa más sal ¿Cómo estará? ¿Y si echa más azúcar y más sal?

RESOLUCIÓN: Anexo I

Problemas Propuestos:

1) Problema de comparación y predicción cualitativa (Cramer y Post ,1993). Dos amigos, Raúl y Jorge, están clavando clavos en un tronco de madera. Los colocan alineados. Raúl tiene más clavos que Jorge, pero su tronco de madera es más pequeño. ¿En qué tronco de madera estarán los clavos más cerca los unos de los otros? ¿En la de Raúl?, ¿En la de Jorge? ¿O Los clavos están espaciados a la misma distancia en las dos tabletas?

2) Tenemos que preparar la taza de café para desayunar de nuestra madre. Los ingredientes son café, azúcar y leche y las cantidades deben de ser las justas porque si no, no le gusta. Las cantidades están escritas en el libro de cocina. Si echamos más café a la mezcla ¿Cómo estará? ¿Y si echamos más azúcar? ¿Y si echamos más café y más azúcar? ¿Y si echamos más café y más leche?

CAMPO DE PROBLEMAS Nº2: Determinar cuáles son magnitudes y establecer la condición de regularidad entre ellas. Se aplican las tecnologías TG1 y TG2.

Problema 2.1: Diferenciar cuáles son magnitudes

¿Cuál de las siguientes expresiones son magnitudes y cuáles no?

El número de teléfono.

La fecha de hoy

El número de manzanas en una bolsa.

La cantidad de gramos de sal que necesito para una receta

El número de matrícula de mi coche.

El número de obreros que están trabajando en una obra.

La cantidad de euros que me cuesta comprar una prenda de ropa.

RESOLUCIÓN: Anexo I

Problema 2.2: Buscar la condición de regularidad de entre las magnitudes que se relacionan.

En una granja de vacas, el granjero tiene que ser previsor para asegurar la alimentación de todas sus vacas y los posibles beneficios. Para ello, ¿Qué magnitudes tiene que tener en cuenta?

- El número de vacas que tiene.
- El consumo diario de pienso de todas sus vacas.
- La cantidad de pienso que tiene almacenado en su granja.
- La cantidad de días que puede alimentar a todas las vacas con el pienso almacenado.
- La superficie de los establos de la granja.
- La superficie del almacén de la granja.
- La fecha del día de hoy.
- El número de teléfono de la granja

RESOLUCIÓN: Anexo I

Problema 2.3: De las magnitudes a tener en cuenta por parte del granjero, ¿cuáles son las que están relacionadas entre sí? ¿Y cómo se relacionan?

RESOLUCIÓN: Anexo I

Problemas propuestos:

1) Si voy a salir de viaje en coche, debo controlar antes si llevo la suficiente gasolina; y si no es así, si llevo bastante dinero para cargar la gasolina necesaria. También debo prever el tiempo el tiempo que va a durar el viaje; y una vez en carretera, la velocidad adecuada. Fallar en cualquiera de estos cálculos me podría poner en dificultades graves. En esta situación, ¿qué magnitudes he de tener en cuenta? Busca la condición de regularidad entre pares de magnitudes que son directamente proporcionales.
    - El precio del litro de gasolina.
    - El precio que me costaría llenar el depósito.
    - Los litros de gasolina que puedo cargar con 40€ (el dinero que llevo).
    - El número que indica el cuentakilómetros antes de salir.
    - El número de emisora de la radio del coche.
    - El tiempo que va a durar el viaje.
    - La cantidad de gasolina que se consume cada kilómetro.

2) De las magnitudes que se muestran, busca una magnitud que se relacione directamente proporcional con ella y escribe su condición de regularidad:
    - Las horas que tarda un mecánico en reparar mi coche.
    - Las horas que esté encendida la calefacción.
    - El número de gramos de cacao que empleo para cocinar una tarta de chocolate.

CAMPO DE PROBLEMAS Nº3: (Primera etapa-reducción al tanto por uno y razón inversa). En este campo de problemas se considera el uso de Geogebra para la visualización de la variación de las cantidades de magnitud relacionadas en la razón construida y que el cociente de dichas cantidades –sometidas a variación- permanece constante[9]. Se aplica la técnica T1 y tecnologías TG1, TG2 y TG3.

Problema 3.1: Si para realizar un bizcocho de chocolate necesito 12 cucharadas de azúcar y 24 cucharadas de cacao, ¿cuántas cucharadas de azúcar se necesitan por una cucharada de cacao? ¿Cuántas cucharadas de cacao se necesitan por 1 cucharada de azúcar?

RESOLUCIÓN: Anexo I

Problemas propuestos:

1) 4 personas comen 6 barras de pan al día. ¿Cuántas barras de pan come 1 persona al día? ¿Cuántas personas se necesitan para comer 1 barra de pan?
2) Con 50 € de propina me compro 3 pantalones. ¿Cuántos euros necesito para comprarme 1 pantalón? ¿Cuántos pantalones me puedo comprar con 1€?

CAMPO DE PROBLEMAS Nº4: Problemas de valor perdido (segunda etapa de razón como tanto por uno). Se aplica la técnica T1 y las tecnologías TG1, TG2 y TG3.

Problema 4.1: Problema del valor perdido con MDP.

Una maquina produce 8 piezas en 6 minutos ¿cuántas piezas se fabricarán en 15 minutos? ¿Cuántos minutos tardará en fabricar 32 piezas? ¿Y 40 piezas?

RESOLUCIÓN: Anexo I

Problemas propuestos:

1) Por tres horas de trabajo, Alberto ha cobrado 55€ ¿Cuánto cobrará por 8 horas?
2) En 17 cajas iguales hay 1632 botones iguales, ¿cuántos habrá en 37? ¿Cuántas cajas se necesitarán para guardar 900 botones?

CAMPOS DE PROBLEMAS Nº5: Problemas de comparación cuantitativa. Se aplica la técnica T1 y las tecnologías TG1, TG2 y TG3.

Problema 5.1 Quiero ir a comprar 700 gramos de lentejas. Conozco dos tiendas donde venden este ingrediente y en cada una de ellas aparece la siguiente oferta:

Primera tienda: 1100gramos de lentejas cuestan 5 €

[9] La visualización de esta recurso TIC está presentada en el Anexo II.

Segunda tienda: 1250 gramos de lentejas cuestan 6€

¿En qué tienda las lentejas están más baratas? Justifica los pasos que realizas para la resolución del problema (condición de regularidad y las razones como tanto por uno).

RESOLUCIÓN: Anexo I

Problemas propuestos:

1) En un instituto se instalaron dos máquinas expendedoras de refrescos de diferentes marcas. La máquina de la marca A vende en total 1602 botellas de agua en 30 días. En cambio, la máquina de la marca B vende en total 4250 botellas en 65 días. ¿Qué máquina vende más botellas? Justifica los pasos que sigues para la resolución del problema (la condición de regularidad y las razones como tanto por uno).
2) La NBA está haciendo un estudio sobre qué jugador anotó más puntos por cada partido a lo largo de toda la competición. El jugador A encestó 549 puntos en 7 partidos y el jugador B anotó un total de 500 puntos en 6 partidos. ¿Qué jugador consiguió más puntos por cada partido? Justifica los pasos que sigues para la resolución del problema (la condición de regularidad y las razones como tanto por uno).

CAMPOS DE PROBLEMA Nº6: Problemas sobre repartos proporcionales (es una aplicación del campo de problemas de valor perdido nº4). Se aplica la técnica T1 y las tecnologías TG1, TG2 y TG3.

Problema 6.1: Mis cuatro amigos y yo compramos un boleto de lotería de 20€. Al comprarlo, cada uno de nosotros pagó una cantidad diferente; Félix pagó 4€, Juan y Carlos pagaron 3€, Sara pago 8 € y yo pagué el resto. Nos tocaron 50.000 € de premio. ¿Cómo tendríamos que repartirnos el premio?

RESOLUCIÓN: Anexo I

Problema propuesto:

1) Hemos comprado tres merluzas que pesaban 2 kg, 3 kg y 7 kg, respectivamente. En total hemos tenido que pagar 90€ ¿Cuánto ha costado cada una?

CAMPOS DE PROBLEMA Nº7: Problemas de proporcionalidad compuesta con relación directa-directa. Se aplica la técnica T1 y las tecnologías TG1, TG2 y TG3.

Problema 7.1: En una fábrica hay 3 motores iguales que funcionando durante 6 horas, necesitan 9000 litros de agua para refrigerarse.

- ¿Cuántos litros de agua necesitará 1 motor funcionando durante 6 horas?

- ¿Cuántos litros de agua necesitarán 5 motores funcionando 6 horas?
- ¿Cuántos litros de agua necesitarán 3 motores funcionando durante 1 hora?
- ¿Cuánto litros de agua necesitarán 7 motores funcionando durante 2 horas?

RESOLUCIÓN: Anexo I

Problemas propuestos:

1) 1 cine dando 2 sesiones diarias, puede dar entrada a 18.000 personas. ¿A cuántas personas podrán ir a 4 cines dando 3 sesiones diarias?
2) Por enviar un paquete de 5 kg de peso a una ciudad que está a 60 km de distancia, una empresa de transporte me ha cobrado 9 €. ¿Cuánto me costará enviar un paquete de 50 kg a 200 km de distancia?

CAMPO DE PROBLEMAS Nº8 Problemas con porcentajes expresados en razón como tanto por ciento. Cálculo de porcentajes de una cantidad, incluyendo problemas de valor perdido, cálculo de la parte, cálculo del total y aumentos y disminuciones porcentuales. Se aplica la técnica T2 y las tecnologías TG1, TG2 y TG4.

Problema 8.1: Razón como tanto por ciento.

En una clase de 30 alumnos han faltado 6 alumnos. ¿Cuál ha sido el porcentaje de ausencias?

RESOLUCIÓN: (Técnica T2.1) Anexo I

Problema 8.2: Cálculo de la parte.

En un rebaño de 400 ovejas, el 20% son negras. ¿Cuántas ovejas negras hay en el rebaño?

RESOLUCIÓN: (Técnica T2.2) Anexo I

Problema 8.3: Cálculo del total

En un hotel hay 180 habitaciones que están ocupadas. Representan el 60% del total de habitaciones del hotel ¿Cuántas habitaciones tiene el hotel?

RESOLUCIÓN: (Técnica T2.3) Anexo I

Problema 8.4: Porcentaje-valor perdido-aumento y disminución porcentual.

Los padres de Elena aumentan su propina semanal de 15 €, en un 10%. Después se la disminuyen en un 15%. ¿Cuánto recibe actualmente cada semana? ¿Cuál ha sido la variación porcentual?

RESOLUCIÓN: (Técnica T2.4.1) Anexo I

Problema 8.5: Porcentaje-valor perdido-aumento y disminución porcentual.

He pagado 9 € por un cinturón que estaba rebajado un 12% ¿Cuál era su precio?

RESOLUCIÓN: (Técnica T2.4.2) Anexo I

Problemas propuestos:

1) En las últimas elecciones municipales, de un censo de 2500 personas, el alcalde actual recibió el voto de 1500 ciudadanos. ¿Qué porcentaje de votantes le voto?
2) En un hospital hay 405 camas de las cuales un 45% están ocupadas. ¿Cuántas camas están ocupadas?
3) En un club deportivo hay 124 socios que juegan al baloncesto y representan el 25% del total. ¿Cuántos socios hay en el club?
4) La masa forestal de un bosque sufrió las siguientes variaciones a los largo de tres décadas: de 1950 a 1960 aumentó el 28%, de 1960 a 1970 disminuyó un 40%, de 1970 a 1980 aumento un 15%. ¿Qué variación porcentual experimento de 1950 a 1980?
5) Después de haber subido un 40%, el precio de un artículo es de 34€ ¿Cuál era el precio antes de la subida?

F. Sobre las técnicas

Para abordar los problemas de proporcionalidad aritmética directa se han de seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Buscar los datos numéricos del enunciado que son magnitudes.

Paso 2: De aquellos que son magnitudes, estudiar si existe una relación directamente proporcional. En dicho caso, establecer la condición de regularidad.

Paso 3: Aplicar alguna de las técnicas que se muestran posteriormente.

Paso 4: Interpretar los resultados obtenidos.

Paso 5: Analizar la coherencia de los resultados numéricos.

Técnica1: Razón como tanto por uno. Razón inversa. (T1)

El planteamiento de los problemas de proporcionalidad vienen dados así: *Dado un valor a de la magnitud A y un valor b de la magnitud B:*

1) *¿Cuánto de la magnitud A se requiere para una cantidad b' de la magnitud B?*

2) *¿Cuánto de la magnitud B se necesita para una cantidad a' de la magnitud A?*

1) *<u>¿Cuánto de la magnitud A se requiere para una cantidad b' de la magnitud B?</u>*

- <u>Primera etapa: Razón como tanto por uno.</u>

  Antes de responder a la cuestión planteada por el problema, nos planteamos la siguiente pregunta:

  ¿Cuánto de la magnitud A se requiere para ***<u>cada unidad</u>*** *de la magnitud B?*

  La razón que relaciona ambas la magnitud A y la magnitud B, de forma que determina la cantidad de la magnitud A por cada unidad de la magnitud B es

$$\frac{a}{b}$$

- <u>Segunda etapa: Búsqueda del valor perdido entre MDP</u>

  ¿Cuánto de la magnitud A se requiere para la cantidad b' de la magnitud B?

$$\frac{a}{b} \cdot b'$$

2) *¿Cuánto de la magnitud B se necesita para la cantidad a' de la magnitud A?*

- Primera etapa: Razón inversa (razón como tanto por uno)

  Antes de resolver esta cuestión, se plantea lo siguiente:

  ¿Cuánto de la magnitud B se necesita para ***cada unidad*** *de la magnitud A?*

  La razón que determina una cantidad de la magnitud B por cada unidad de la magnitud A es:

$$\frac{b}{a}$$

- Segunda etapa: Búsqueda del valor perdido entre MDP.

  ¿Cuánto de la magnitud B se necesita para la cantidad a' de la magnitud A?

$$\frac{b}{a} \cdot a'$$

Esta técnica puede tener algunas variaciones, para ello planteo un ejemplo significativo y así reflejarlas con más detalle:

VARIACIONES DE LA TÉCNICA 1 (V.T1)

EJEMPLO: Una máquina produce 8 piezas en 6 minutos. ¿Cuántas piezas hará en 12 minutos? ¿Cuánto tiempo necesitará para fabricar 20 piezas? ¿Y 36 piezas?

Técnica 1 (T1): Resolución a través de la técnica T1 mostrada anteriormente

¿Cuántas piezas hará en 12 minutos?

- Primera etapa: razón como tanto por uno.

  ¿Cuántas piezas hará en 1 minuto?

  $\frac{8}{6}$ piezas fabrica la máquina en 1 MINUTO

- Segunda etapa: Búsqueda del valor perdido entre MDP.

  ¿Cuántas piezas hará en 12 minutos?

  Si la máquina fabrica $\frac{8}{6}$ cada minuto, en 12 minutos fabricará: $\frac{8}{6} \cdot 12 = 16$ piezas.

¿Cuánto tiempo necesitará para fabricar 20 piezas?

- Primera etapa: Razón inversa (razón en tanto por uno)

  ¿Cuántos minutos necesitará para fabricar 1 pieza?

  $\frac{6}{8}$ minutos necesita la máquina para fabricar 1 PIEZA

¿Cuánto tiempo necesitará para fabricar 20 piezas?

Para fabricar 1 pieza necesita $\frac{6}{8}$ minutos, así que para fabricar 20 piezas necesitará $\frac{6}{8} \cdot 20 = 15$ minutos.

<u>Variación 1 de la Técnica 1 (V1.T1): cuarta proporcional</u>

<u>*¿Cuántas piezas hará en 12 minutos?*</u>

Tiempo(minutos)	6	12	¿?	¿?	1	¿?
Número de piezas	8	¿?	20	36	¿?	1

El número de piezas que fabrica la máquina cada minuto se mantiene constante. Dicho esto, sea cual sea el valor de las magnitudes ha de verificarse la igualdad entre razones (proporción). Esta técnica se conoce como la cuarta proporcional.

La técnica de <u>cuarta proporcional</u> determinada por igualdad entre las razones que relacionan el número de piezas fabricadas en una unidad de tiempo viene dada por:

$\frac{8}{6}$ piezas fabricadas en 1 minuto = $\frac{4}{3}$ piezas fabricadas en 1 minuto

$$\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Por lo tanto, para completar la tabla, basta con buscar el "valor perdido":

Tiempo (minutos)	6	**12**	¿?	¿?	**1**	¿?
Nº de piezas	8	$\mathbf{\frac{4}{3} \cdot 12 = 16}$	20	36	$\mathbf{\frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}}$	1

Además se verifica que la igualdad entre razones,

$\frac{8}{6}$ piezas fabricadas en 1 MINUTO = $\frac{16}{12}$ piezas fabricadas en 1 MINUTO

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{16}{12}$$

Ahora bien, para seguir completando la tabla, necesitamos la razón inversa y calculamos los datos desconocidos como un problema de valor perdido:

$\frac{6}{8}$ minutos necesita para fabricar 1 PIEZA= $\frac{3}{4}$ minutos necesita para fabricar 1 PIEZA

Es decir, se obtiene la siguiente igualdad entre razones:

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Tiempo (minutos)	6	12	$\mathbf{\frac{3}{4} \cdot 20 = 15}$	$\mathbf{\frac{3}{4} \cdot 36 = 27}$	1	$\mathbf{\frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}}$
Nº de piezas	8	$\frac{4}{3} \cdot 12 = 16$	**20**	**36**	$\frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}$	**1**

$\frac{6}{8}$ minutos necesita para fabricar 1 PIEZA= $\frac{15}{20}$ minutos necesita para fabricar 1 PIEZA

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{15}{20}$$

$\frac{6}{8}$ minutos necesita para fabricar 1 PIEZA= $\frac{27}{36}$ minutos necesita para fabricar 1 PIEZA

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20} = \frac{6}{8} = \frac{27}{36}$$

Variación 2 de la Técnica 1 (V2.T1):

¿Cuántas piezas hará en 12 minutos?

El número de piezas que fabrica la máquina en 1 minuto se mantiene constante. La máquina fabrica 8 piezas en 6 minutos, entonces en 12 minutos -el doble de minutos-, fabricará $8 \cdot 2 = 16$ piezas -el doble de piezas-.

¿Cuántos minutos necesitará para fabricar 20 piezas?

- La máquina fabrica **8** piezas en **6** minutos.
- La máquina fabrica 16 piezas en 12 minutos.
- La máquina fabrica 4 (**la mitad de 8**) piezas en 3 minutos (**la mitad de 6**).
- La máquina fabrica 20 piezas (16 piezas +4 piezas) en 15 minutos (12 minutos +3 minutos)

¿Cuántos minutos necesitará para fabricar 36 piezas?

- La máquina fabrica 36 piezas (20 piezas + 16 piezas) en 27 minutos (15 minutos + 12 minutos)

<u>Técnica 2 (T2): Porcentaje o razón como tanto por ciento.</u>

T2.1: Cálculo del tanto por ciento. A partir de una cantidad total a de una magnitud A y una parte de ella p, el porcentaje o tanto por ciento que representa esa parte viene dada por:

$$\frac{p}{a} \cdot 100$$

T2.2 Cálculo de la parte.

Del total de la magnitud A dado por a, el p% representa una parte del total, siendo $p > 100$ o $p \leq 100$. La cantidad parcial p% respecto del total de la magnitud A viene dado por:

$$\frac{p}{100} \cdot a$$

<u>Primera etapa</u>: razón como tanto por ciento.

$\frac{p}{100}$ la cantidad parcial que cumple alguna condición por cada unidad del total.

<u>Segunda etapa:</u> búsqueda del valor perdido.

$\frac{p}{100} \cdot a$ determina la cantidad parcial que cumplen la condición respecto del total de la magnitud A.

T2.3 Cálculo del total

Dada la magnitud A, d representa una parte del total de dicha magnitud, el cual corresponde con un p% del total. El total de la magnitud A viene dado por:

$$\frac{100}{p} \cdot d$$

<u>Primera etapa:</u> razón como tanto por ciento

$\frac{100}{p}$ determina la cantidad total por cada unidad que verifica la condición.

<u>Segunda etapa</u>: búsqueda del valor perdido

$\frac{100}{p} \cdot d$ la cantidad total respecto de la parte de la magnitud A que verifica la condición.

T2.4 Aumento y disminución porcentual:

– **T2.4.1:** Si la cantidad inicial a de una magnitud A, aumenta o disminuye un d%, el valor final de dicha magnitud será :

  <u>Primera etapa:</u> razón como tanto por ciento.

  $\frac{100+d}{100}$ cantidad final de magnitud A aumentada por cada unidad de magnitud A inicial.

$\frac{100-d}{100}$ cantidad final de magnitud A disminuida por cada unidad de magnitud A inicial

Segunda etapa: búsqueda del valor perdido.

$$\left(\frac{100+d}{100}\right)\cdot a\,,\quad \left(\frac{100-d}{100}\right)\cdot a$$

- **T2.4.2:** Si el valor final a de una magnitud A, ha aumentado o disminuido un d%, el valor inicial de dicha magnitud será:

  Primera etapa: razón como tanto por ciento.

  $\frac{100}{100+d}$ cantidad de magnitud A inicial por cada unidad de magnitud Aaumentada.

  $\frac{100}{100-d}$ cantidad de magnitud A inicial por cada unidad de magnitud A disminuida.

  Segunda etapa: búsqueda del valor perdido

$$\left(\frac{100}{100+d}\right)\cdot a\,,\quad \left(\frac{100}{100-d}\right)\cdot a$$

G. Sobre las tecnologías

A continuación se presentan las tecnologías que dan justificación a las técnicas que se emplean para la resolución de los campos de problemas. Las tecnologías aparecen inicialmente en los estudiantes en un nivel intuitivo pero más adelante deberán ser formalizadas e institucionalizadas en el proceso de enseñanza por parte del docente.

TECNOLOGÍA 1 (TG1): Definición de magnitud.

Se define magnitud de la siguiente manera[10]:

f. Tamaño de un cuerpo.
Fig. Grandeza, importancia.
ASTRON. Magnitud de una estrella.
FÍS. Propiedad de un cuerpo capaz de ser medida, como p. ej., masa, longitud, temperatura, etc.
FÍS y MAT. Magnitud escalar. Aquella cuyos valores pueden ser expresados mediante un número.
FÍS. Magnitud vectorial. Aquella cuyos valores deben expresarse utilizando un vector.
MAT. Cualquier entidad a la que se le puede asignar una medida.

TECNOLOGÍA 2 (TG2): Definición de magnitudes directamente proporcionales, condición de regularidad y cuarta proporcional.

Las magnitudes pueden estar relacionadas parcialmente, totalmente o bien, no estar relacionadas. El contexto influye en dicha relación. Veamos un ejemplo de cada uno de los casos:

Magnitudes que no están relacionadas:

- El dinero que llevo en los bolsillos.
- La temperatura que hace en la calle.

La temperatura que hace en la calle no influye en que lleve más o menos cantidad de dinero en los bolsillos, por lo tanto, dichas magnitudes no están relacionadas.

Magnitudes parcialmente relacionadas:

- La propina que me dan mis padres.
- La edad que tengo.

Son magnitudes que influyen la una en la otra pero de una forma desconocida. Dicho de otra manera, cuanta mayor edad tengo, mis padres me dan más propina, pero

[10] magnitud. (n.d.).*Diccionario Manual de la Lengua Española Vox*. (2007).

no existe un “patrón o constante” que determine cuánto aumenta mi propina en función de mi edad.

Magnitudes totalmente relacionadas:

- La cantidad de agua que sale de un grifo.
- El tiempo que está abierto el grifo.

Dichas magnitudes están totalmente relacionadas, ya que ambas magnitudes influyen la una en la otra de una forma conocida. La cantidad de agua que sale de un grifo (con la misma apertura) durante un tiempo determinado siempre es la misma, o bien, el tiempo que el grifo ha de estar abierto para que salga una determinada cantidad de agua es constante.

Magnitudes directamente proporcionales:

De las magnitudes que están totalmente relacionadas, tiene sentido realizar el cociente entre ellas, de forma que el resultado indica la medida de una de las cantidades de magnitud respecto a la unidad de medida de la otra magnitud. La representación de dicha medida se define **razón** (Cid y Escolano, 2015).

Dicho esto, para que la construcción de la razón entre dos magnitudes tenga sentido, es necesario establecer la condición de regularidad entre ambas (la relación entre una unidad de una de las magnitudes implicadas y la cantidad respectiva de la otra magnitud no varía, permanece constante).

Los contextos en los que se puede establecer dicha condición de regularidad se deben a que las cantidades del par de magnitudes que interviene en la razón varían proporcionalmente de la siguiente manera: la variación multiplicativa en una de las cantidades produce el mismo efecto en la otra cantidad de magnitud. Definimos así, que dicho par de magnitudes son directamente proporcionales.

Veamos el siguiente ejemplo con las magnitudes totalmente relacionadas descritas anteriormente:

- La cantidad de agua (en litros) que sale de un grifo.
- El tiempo que está abierto el grifo.

Ambas expresan una cantidad de magnitud. Además existe una condición de regularidad entre ambas cantidades: la cantidad de agua que sale del grifo permanece constante por cada unidad de tiempo y/o el tiempo que se necesita el grifo abierto por cada litro de agua es siempre el mismo. Dicho esto, existe una relación de proporcionalidad entre ambas magnitudes y por tanto, se pueden construir dos razones entre dichas cantidades.

Razón que establece la relación entre la cantidad de agua que sale del grifo por 1 unidad de tiempo y la razón inversa que establece la relación entre la cantidad de tiempo que se necesita para que salga 1 litro de agua.

Si duplicamos el tiempo que dejamos abierto el grifo, la cantidad de agua que sale en total, también se duplicará. Si el tiempo que dejamos abierto el grifo lo reducimos a la mitad, la cantidad total de agua que sale del grifo también se reduce a la mitad. Dicho esto, se trata de magnitudes directamente proporcionales.

En conclusión, dos magnitudes son directamente proporcionales si puede establecerse entre ellas una condición de regularidad. Como consecuencia de ello, tiene sentido la construcción de la razón entre las mismas.

Cuarta proporcional:

La razón entre dos cantidades de magnitud ha de ser igual a la razón entre otras dos cantidades de las mismas magnitudes, es decir, se plantea una relación entre relaciones, y por tanto, ya no corresponde a una razón sino a una proporción.

Dadas $M1$ y $M2$ dos magnitudes relacionadas en un sistema lineal con $a1$ y $a2$ dos cantidades de magnitud de $M1$ y $b1$ y $b2$, las cantidades de magnitud correspondientes en la magnitud $M2$ se cumple que para estas cuatro cantidades de magnitud se verifica la siguiente relación (Ordoñez y Alonso, 2013):

$$\frac{a1}{b1} = \frac{a2}{b2}$$

De acuerdo con el problema planteado CPNº4, el docente, hará la siguiente pregunta:

- *¿Es lo mismo decir que una máquina fabrica 8 piezas en 6 minutos y que fabrica 16 piezas en 12 minutos?*

El docente les dejará un tiempo para que lo reflexionen individualmente y reflexionen sobre la respuesta. Además se les propondrá que busquen cuál es la razón (razones) entre la magnitud del tiempo medido en minutos y el número de piezas, es decir, que descubran la igualdad entre razones

Una vez que los alumnos lo han reflexionado, el docente responderá a la pregunta planteada para institucionalizar el concepto dando el siguiente razonamiento:

$\frac{8}{6}$ *piezas fabricada en 1 minuto =* $\frac{16}{12}$ *piezas fabricadas en 1 minuto =* $\frac{4}{3}$ *piezas fabricadas en 1 minutos. Es decir,*

$$\frac{8}{6} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Es conveniente dejar el resultado en fracción y no pasarlo a número racional puesto que dicho paso favorecería la desaparición de las unidades de medida de las magnitudes con las que estamos trabajando. Como consecuencia, la construcción de la razón perdería su sentido.

TECNOLOGÍA 3 (TEG3): Definición de razón como tanto por uno. (Martínez, Muñoz, Oller y Pecharromán, 2015)

> La razón entre una cantidad a de una magnitud A y una cantidad b de una magnitud B, denotaremos como a/b, se identifica como la cantidad a de una magnitud A que se relaciona con una unidad de la magnitud B. De esta forma, al emplear la notación a/b no se ven dos números separados correspondientes a cantidades de magnitudes diferentes, sino que se considera como un único número que representa una cantidad de una magnitud cociente. Por tanto, damos libertad a los alumnos para utilizar el sistema de representación que consideren más adecuado, fraccionario o decimal si bien se incide en la conveniencia de uno u otro según el caso.

A continuación daremos justificación a la técnica T1 empleada para resolver planteamiento de problemas del tipo:

Dado un valor a de la magnitud A y un valor b de la magnitud B. ¿Cuánto de la magnitud A se requiere para una cantidad b' de la magnitud B? ¿Cuánto de la magnitud B se necesita para una cantidad a' de la magnitud A?

Resolvemos la primera pregunta:

<u>*¿Cuánto de la magnitud A se requiere para una cantidad b' de la magnitud B?*</u>

- <u>Primera etapa:</u> razón como tanto por uno.

  Antes de responder a la cuestión planteada por el problema, nos planteamos lo siguiente:

  ¿Cuánto de la magnitud A se requiere para <u>**una unidad**</u> *de la magnitud B?*

  La razón $\frac{a}{b}$ determina la cantidad de la magnitud A por una unidad de B

- <u>Segunda etapa:</u> búsqueda del valor perdido entre MDP

  Volviendo a la cuestión del problema: *¿Cuánto de la magnitud A se requiere para una cantidad b' de la magnitud B?*

  En la primera etapa, se ha obtenido la razón que relaciona ambas magnitud para una unidad de la magnitud B. Para obtener la cantidad de la magnitud A que se necesita para b' unidades de la magnitud B:

$\frac{a}{b} \cdot b'$ cantidad de magnitud A que se necesita para un valor b' de magnitud B

¿Cuánto de la magnitud B se necesita para una cantidad a' de la magnitud A?

- Primera etapa: razón inversa (razón como tanto por uno)

  ¿Cuánto de la magnitud B se necesita para una unidad de la magnitud A?

  Este planteamiento es idéntico a la resolución de la primera cuestión, pero en este caso buscamos la situación contraria.

  La razón $\frac{b}{a}$ determina la cantidad de la magnitud B por una unidad de la magnitud A.

- Segunda etapa: búsqueda del valor perdido entre MDP

  ¿Cuánto de la magnitud B se necesita para una cantidad a' de la magnitud A?

  $\frac{b}{a} \cdot a'$ cantidad de magnitud B que se necesita para un valor a' de magnitud A.

TECNOLOGÍA 4 (TEG4): Definición de razón como tanto por ciento. (Martínez, Muñoz, Oller y Pecharromán, 2015)

> Si dos magnitudes A y B tienen una relación de proporcionalidad directa, el porcentaje que A representa respecto B como la cantidad de A que se corresponde con 100 unidades de B. Luego si a/b es la razón entre A y B, es claro que el porcentaje que representa A respecto de B es a/b·100.

A partir de la propuesta didáctica de los autores mencionados, se justifican la técnica T2 asociada con los porcentajes de la siguiente manera:

Cálculo del tanto por ciento:

Si dos magnitudes A y B tienen una relación de proporcionalidad directa, el porcentaje A respecto de B se representa como la cantidad de A que se corresponde con 100 unidades de B. Luego si a/b es la razón como tanto por ciento, el porcentaje A respecto de B es:

$$\frac{a}{b} \cdot 100$$

Cálculo de la parte:

Del total de la magnitud A dado por a, el p% representa una parte del total, siendo $p > 100$ o $p \leq 100$. La cantidad parcial p% respecto del total de la magnitud A viene dado por:

$$\frac{p}{100} \cdot a$$

La propia técnica define los pasos a seguir para la construcción de la razón. Y a su vez, es la propia razón que da justificación en su totalidad a la técnica. Remitimos de nuevo a la lectura de la técnica *cálculo de la parte*.

Cálculo del total:

Dada la magnitud A, d unidades representan una parte del total. Dichas unidades corresponden con un $p\%$ del total. El total de la magnitud A viene dado por:

$$\frac{100}{p} \cdot d$$

De forma similar que en la justificación de *cálculo de la parte*, ocurre con esta tecnología del *cálculo del total*. Es por ello, que la justificación de dicha técnica se da en la misma.

Aumento porcentual:

Si la magnitud A aumenta en $d\%$ su cantidad, la cantidad final de la magnitud A será

$$a + \frac{d}{100} \cdot a = \left(\frac{100 + d}{100}\right) \cdot a$$

Disminución porcentual:

Si la magnitud A disminuye en $d\%$ su cantidad, la cantidad final de la magnitud A será

$$a - \frac{d}{100} \cdot a = \left(\frac{100 - d}{100}\right) \cdot a$$

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

La secuenciación de la propuesta didáctica que se llevará a cabo en el aula tendrá una duración de 12 sesiones. Teniendo en cuenta que cada sesión tendrá una duración de 50 minutos, su distribución será la siguiente:

SESIÓN 1: **Inicio y evaluación inicial.**

Durante esta sesión se llevará a cabo la **prueba de diagnóstico** propuesta en el apartado C para evaluar los conocimientos previos de los alumnos. Los resultados de dicha prueba servirán al docente como medio para averiguar las dificultades de sus alumnos y valorar si es necesaria una sesión adicional para reforzar dichos conocimientos necesarios para abordar con mayor facilidad durante las siguientes sesiones.

SESIÓN 2

Esta sesión sirve como introducción del objeto matemático a enseñar. Para ello, se les planteará a los alumnos la **razón de ser nº1:"Intercambio de cromos"**. Se trata de un problema fácil cuya resolución no requiere de conocimientos precisos sobre la proporcionalidad. De hecho, pueden apoyarse en diagramas o dibujos que ayuden su resolución. Los alumnos han de plantearlo con las estrategias que ellos crean convenientes y se sientan más seguros. Cabe esperar, que al tratarse de un problema con datos numéricos fáciles y que además, son representados gráficamente, que los alumnos no recurran a la regla de tres. Es más, este problema se propone a los alumnos que lo resuelvan sin ellos saber que el nuevo tema que se va a abordar es el de la proporcionalidad aritmética.

Una vez que el problema ha sido resuelto por los alumnos, se comentará entre toda las clase cada una de las estrategias que se han empleado para su resolución. El planteamiento de un problema de razón de ser favorece que el alumno comprenda el significado de los problemas que se van a trabajar en el aula. A posteriori, se propone a los alumnos que sean ellos mismos que se inventen otra relación de cromos e igualmente, lo resuelvan.

Posteriormente, se sugiere a los alumnos el **campo de problemas nº1**. Son problemas de predicción y comparación cuantitativa en los cuales no hay valores numéricos, solamente se conoce la relación de orden entre las cantidades de las magnitudes. Una vez que los alumnos hayan reflexionado, se hace una puesta en común sobre la solución. Dicha puesta en común dará pie a un buen debate entre los alumnos quienes iniciarán el razonamiento proporcional con la ausencia de valores numéricos.

Finalmente, el docente institucionalizará los nuevos conceptos a través de la resolución de los campos de problemas. La metodología a seguir está más especificada en el apartado I.

SESIÓN 3

Para el comienzo de esta sesión se presenta dos **razones de ser: nº2 y nº3.** Estas razones de ser ayudaran al alumno a conocer qué situaciones aparecen magnitudes que se relacionan proporcionalmente y cuáles no.

Una vez que el alumno ha analizado dichas situaciones individualmente, el docente corregirá las actividades.

Tras la resolución de las razones de ser, el docente propone a sus alumnos la realización del **campo de problemas nº2** para afianzar los conceptos que han aparecido en las razones de ser. Este campo de problemas incide en establecer con exactitud la condición de regularidad entre pares de magnitudes para dar sentido a las razones de ser y campos de problemas posteriores. Para finalizar la sesión, el docente institucionalizará los conceptos que han aparecido a través de la corrección del campo de problemas.

SESIÓN 4

La cuarta sesión empieza con la **razón de ser nº4.** Trata de un problema donde los alumnos van a analizar la necesidad de reducir a la unidad. Esta razón de ser tiene la finalidad de que los alumnos no vean la utilidad de la regla de tres. Mencionar que el docente debe hacer ver a los alumnos que la regla de tres involucra operaciones que carecen de sentido. Además tiene como segundo objetivo introducir la razón como tanto por uno.

Después, se abordará el **campo de problemas nº 3.** Con este campo de problemas se formalizarán los conceptos de la razón como tanto por uno y la razón inversa.

SESIÓN 5

A lo largo de la quinta sesión se seguirá trabajando la razón como tanto por uno, y se abordaran problemas de valor perdido. La actividad de inicio será la **razón de ser nº5.** Dicha actividad será presentada a los alumnos para resolverla individualmente. Además, se trabajarán los problemas de valor perdido incluidos en el **campo de problemas nº4** los cuales también serán empleados por el docente como un instrumento para la institucionalización de las estrategias en la resolución de los problemas de este ámbito.

SESIÓN 6:

Durante esta sesión, los alumnos trabajarán los problemas de comparación cuantitativa, **campos de problemas nº5** pero no sin antes haber reflexionado individualmente la **razón de ser nº6.**

SESIÓN 7

La séptima sesión aborda problemas de repartos proporcionales y proporcionalidad compuesta directa-directa. Dichos problemas son unas variaciones de lo visto anteriormente, así que durante esta sesión se trabajarán los **campo de problemas nº6 y nº7.**

SESIÓN 8

Durante las ulteriores sesiones, se trabajará con los estudiantes el porcentaje presentado como razón en tanto por ciento. Previamente a la presentación del **campo de problemas nº8**, los alumnos realizarán la **razón de ser nº7** de forma individual**.**

SESIÓN 9

Es de esperar, que el **campo de problemas nº8** no se finalice en la octava sesión. Dicho esto se empleará una novena sesión para seguir trabajando el último campo de problemas.

SESIÓN 10

Durante la sesión previa al examen, el docente hará un breve **repaso** de aspectos conceptuales y técnicas de resolución vistos a lo largo de las sesiones: definición de magnitud, situaciones proporcionales y no proporcionales, definición de razón como tanto por uno, razón inversa, igualdad entre razones y razón como tanto por ciento.

SESIÓN 11: Examen

Se proponen 6 problemas en total. El total de las preguntas tendrán una puntuación de 11 puntos, en vez de 10. La nota que obtengan será sobre 11, pero se puntuará como si se hubiese obtenido sobre 10. La finalidad de esta valoración es de favorecer a los alumnos que habitualmente no alcanzan el aprobado del examen por pocas décimas. Asimismo se favorece a los alumnos con notas buenas a quienes también se les incrementa un 10% la nota. El examen es el siguiente:

<u>Pregunta 1</u>: (1 punto)

Indica cuál es la condición de regularidad entre los pares de magnitudes en caso de que lo haya y resuelve los problemas.

- Juan pesaba 27 kilogramos a los 5 años ¿Cuántos kilogramos pesará cuando triplique la edad?
- Marta ha comprado 600 gramos de naranjas en la frutería y le han costado 2 €. ¿Cuánto le costarán 3 kilogramos de naranjas?

Pregunta 2: (2 puntos)

Voy al supermercado a comprar aceite y hay 3 ofertas diferentes que corresponden a distintas marcas. Las ofertas son las siguientes:

1. Si compras 2 botellas de aceite de la marca nº1 de $\frac{3}{2}$ litros cada una, pagas 6€
2. 1 botella de aceite de la marca nº 2 de $\frac{3}{4}$ de litro te cuesta 5 €
3. Si compras 4 botellas de 8 litros en total, te cuesta 20 €

¿Cuál es la oferta más barata? Justifica los pasos que realizas para la resolución del problema.

Pregunta 3: (2 puntos)

Tres amigos Ana, Berta y David decidieron echar una quiniela de fútbol poniendo cada uno de ellos 6, 15 y 9 € respectivamente. Después del fin de semana se enteraron que les había tocado un premio total de 1200 € ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno de ellos?

Pregunta 4: (2 puntos)

Un hotel necesita 5400 € para atender a 40 clientes durante 15 días. ¿Cuántos euros necesitará para atender 50 clientes durante 10 días?

Pregunta 5: (2 puntos)

En un paquete tengo 8000 canicas de cuatro colores: azules, amarillas, verdes y rojas. 1200 son azules ¿Cuál es el porcentaje?

Las canicas amarillas y verdes representan el 65% de las canicas en total. ¿Cuántas canicas rojas hay en el paquete?

Pregunta 6: (2 puntos)

Los operarios de una empresa cobran un salario mensual de 800 €. La empresa tiene que bajar un 20% el salario mensual de los trabajadores debido a que sus beneficios han decrecido. Unos meses más tarde, el gobierno aumenta 20% su salario. ¿Cuál es la variación porcentual? ¿Cuál es el salario mensual de los trabajadores de la empresa?

SESIÓN 12: Corrección del examen

. El docente a lo largo de esta última sesión explicará de forma pormenorizada las respuestas del examen. Se propone a los alumnos que vuelvan a hacer individualmente el examen y se lo entreguen al profesor.

Es de esperar que los alumnos hayan reflexionado con mayor profundidad durante el examen que los días previos a este –aunque el docente haya intentado lo contrario-. Si se hace una corrección posterior al examen los conceptos quedarán más claros tras haber debatido y argumentado las respuestas del propio examen. Más aún, si los alumnos hacen el examen de nuevo, su aprendizaje será más significativo.

En lo que sigue, se muestra una tabla con la temporalización aproximada sobre los aspectos tratados en las sesiones.

CRONOGRAMA		
SESIÓN 1	Prueba de diagnóstico	50'
SESIÓN 2	Razón de ser nº1	20'
	Campo de problemas nº1	30'
SESIÓN 3	Razón de ser nº2	15'
	Razón de ser nº 3	15'
	Campo de problemas nº2	20'
SESIÓN 4	Razón de ser nº4	15'
	Campo de problemas nº3	35'
SESIÓN 5	Razón de ser nº5	15'
	Campo de problemas nº4	35'
SESIÓN 6	Razón de ser nº6	15'
	Campo de problemas nº5	35'
SESIÓN 7	Campo de problemas nº6	25'
	Campo de problemas nº7	25'
SESIÓN 8	Razón de ser nº7	15'
	Campo de problemas nº8	35'
SESIÓN 9	Campo de problemas nº8	50'
SESIÓN 10	Repaso	50'
SESIÓN 11	Examen	50'
SESIÓN 12	Corrección del examen	50'

I. Sobre la metodología

Con la metodología tradicional de enseñanza los alumnos tienen los conocimientos necesarios para resolver problemas –previamente explicados por el profesor-, pero a la hora de que sean ellos mismos quienes se enfrenten al problema encuentran serias dificultades en traspasar dichos conocimientos en estrategias de resolución de los mismos. La enseñanza tradicional de la materia de las matemáticas no toma como principal protagonista al alumno, sino que algunos docentes al verse obligados a seguir la totalidad de los contenidos del currículo y su respectiva temporalización, recurren a la enseñanza de técnicas fáciles para que posteriormente, sea el alumno quien las aplique a una lista de ejercicios y problemas repetitivos para que queden bien automatizadas. Dicha metodología induce a que los alumnos las aprendan con rapidez aunque sin tomarse el tiempo necesario para la reflexión y así, se obtenga un aprendizaje por descubrimiento y más significativo. Dicho esto, la metodología que se muestra incide en la reflexión del propio alumno.

Para los problemas de razón de ser, se formarán grupos de tres. Inicialmente pensarán la solución individualmente y a posteriori, harán una puesta en común con el resto de sus compañeros del grupo. Los grupos los formará el docente de forma que en cada uno de ellos habrá alumnos con diferente nivel cognitivo (bajo, medio y alto). Una vez que los grupos de alumnos hayan reflexionado e intercambiado conocimientos, se hará una puesta en común con toda la clase sobre las estrategias utilizadas. El profesor será el mediador y corrector de dicho debate.

Los campos de problemas tienen como principal objetivo que el docente institucionalice los nuevos objetos matemáticos. Para ello, los alumnos realizarán de forma individual un problema propuesto del campo de problemas. Tras su reflexión, el docente corregirá el problema institucionalizando los nuevos conceptos a través de las técnicas y sus tecnologías asociadas que se han citado en esta propuesta. Este mismo proceso se realizará con el resto de problemas de los diferentes campos de problemas. El orden de los mismos será el establecido en el cronograma del Apartado H.

Para que la dinámica de la clase no sea monótona, algunos problemas propuestos –a elección del docente y una vez institucionalizado las técnicas y tecnologías-también pueden seguir la metodología de las razones de ser, es decir, formando grupos de tres.

J. Sobre la evaluación: guía de corrección de la prueba escrita

Los criterios de calificación que voy a emplear están basados en el modelo de corrección redactado por Gairín, Muñoz y Oller (2012) el cual cuantifica los errores de cada pregunta apoyándose en una jerarquía de tareas previamente establecida. La jerarquía de tareas queda determinada en orden decreciente de relevancia por: tareas principales, tareas auxiliares específicas y tareas auxiliares generales.

El modelo de penalización de errores que se empleará será el siguiente:

<u>Tareas principales:</u> el conjunto de errores de este tipo de tareas se penalizará hasta el 70%, 60 % o el 50% de la puntuación global de la pregunta. La penalización de errores en este tipo de tareas no llevará al evaluador a dejar de calificar la pregunta.

<u>Tareas auxiliares específicas:</u> el conjunto de errores de este tipo de tareas se penalizará hasta el 20 %, 30 % o el 40% de la puntuación global según la pregunta de la prueba escrita. La penalización de errores en este tipo de tareas no llevará al evaluador a dejar de calificar la pregunta.

<u>Tareas auxiliares generales:</u> el conjunto de errores en este tipo de tareas se penalizará como máximo el 10% de la puntuación de la pregunta. Se continuará calificando.

La cuantía de puntuación con la que se penalizarán los errores queda reflejada en las ulteriores tablas.

Una vez que los alumnos han hecho el examen, se hace una corrección del mismo durante la siguiente sesión de clase. El docente incidirá en los errores más significativos y más comunes que hayan cometido los estudiantes en el examen. Posteriormente, los alumnos resolverán de nuevo el examen que, junto con la corrección del profesor, serán más capaces de finalizar la resolución de aquellos problemas que habían realizado erróneamente y a su vez, entender los términos conceptuales que no lo habían hecho previamente.

Estructura de las preguntas: campos de problemas, técnicas, tecnologías, resolución, jerarquía de tareas y criterios de calificación.

A continuación se muestran los aspectos del conocimiento de los alumnos sobre la proporcionalidad aritmética que se pretenden evaluar por cada una de las preguntas de la prueba escrita, así como la jerarquía de tareas que se van a considerar y hasta qué puntuación se penalizan los errores cometidos en cada una de ellas:

<table>
<tr><th colspan="3">PREGUNTA 1 (1 punto)</th></tr>
<tr><td colspan="3">Indica cuál es la condición de regularidad entre los pares de magnitudes en caso de que lo haya y resuelve los problemas.
• Juan pesaba 27 kilogramos a los 5 años ¿Cuántos kilogramos pesará cuando triplique la edad?
• Marta ha comprado 600 gramos de naranjas en la frutería y le han costado 2 €. ¿Cuánto le costarán 3 kilogramos de naranjas?</td></tr>
<tr><th>Campos de problemas</th><th>Técnica</th><th>Tecnologías</th></tr>
<tr><td>Nº 1</td><td>T1</td><td>TG1, TG2 y TG3</td></tr>
<tr><th colspan="3">Resolución</th></tr>
<tr><td colspan="3">En el primer caso, el par de cantidades de magnitud que aparecen son los kilogramos que pesa Juan y sus años. No se puede establecer una condición de regularidad entre este par de magnitudes porque la cantidad de kilogramos que aumenta Juan cada año no permanece constante. Es decir, Juan no aumenta la misma cantidad de kilogramos cada año. Habrá años que suba de peso, otros que adelgace o bien mantenga su peso.
En el segundo caso, el par de magnitudes que aparecen son el peso (en gramos) de las naranjas que ha comprado Marta y los euros que ha pagado por ellos. Como no hay ninguna oferta, se puede establecer una condición de regularidad entre dichas magnitudes: la cantidad de gramos de naranjas que puede comprar con 1 € no varía, se mantiene constante. Es decir, por cada euro que paga se lleva la misma cantidad de naranjas. Es por ello, que tiene sentido la construcción de la razón entre ambas magnitudes.
$\frac{2}{600}$ euros por 1 gramo de naranja
$\frac{2}{600} \cdot 2400 = 6$ euros cuesta 3 kilogramos de naranjas.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Tareas principales (penalización hasta 70% de la puntuación)</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Cuestión 1</u></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Establecer la condición de regularidad entre pares de magnitudes, en caso de que lo haya.</td><td>PENALIZACIÓN DEL ERROR</td></tr>
<tr><td>Hasta 0.35 ptos.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Cuestión 2</u></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Establecer la condición de regularidad entre pares de magnitudes, en caso de que lo haya.</td><td>PENALIZACIÓN DEL ERROR</td></tr>
<tr><td>Hasta 0.35 ptos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas auxiliares específicas (penalización hasta 20% de la puntuación)</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Cuestión 1</u></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Obtener las razón como tanto por uno.</td><td>PENALIZACIÓN DEL ERROR</td></tr>
<tr><td>Hasta 0.1 ptos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Cálculo del valor perdido.</td><td>PENALIZACIÓN DEL ERROR</td></tr>
<tr><td>Hasta 0.1ptos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tareas auxiliares generales (penalización hasta 10% de la puntuación)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operaciones con fracciones y números decimales.</td><td>PENALIZACIÓN DEL ERROR</td></tr>
<tr><td>Hasta 0.1 ptos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Posibles respuestas correctas adicionales</td></tr>
<tr><td colspan="2">En el segundo caso, no resolver a través de la razón, sino a través de la variación multiplicativa. Es decir, multiplicar por cuatro el precio inicial de las naranjas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Posibles errores</td></tr>
<tr><td colspan="2">– En el primer caso, establecer una condición de regularidad que no existe.
– En el segundo caso, calcular erróneamente la razón. Calcular la razón inversa, en vez de la razón correcta.</td></tr>
</table>

PREGUNTA 2 (2 puntos)
Voy al supermercado a comprar aceite y hay 3 *ofertas diferentes que corresponden a distintas marcas. Las ofertas son las siguientes:* *1. Si compras 2 botellas de aceite de la marca nº1 de* $\frac{3}{2}$ *litros cada una, pagas 6€* *2. 1 botella de aceite de la marca nº 2 de* $\frac{3}{4}$ *de litro te cuesta* 5 € 3. *Si compras* 4 *botellas de la marca nº3 de* 8 *litros en total, te cuesta* 20 € *¿Cuál es la oferta más barata? Justifica los pasos que realizas para la resolución del problema.*

Campos de problemas	Técnica	Tecnologías
Nº2, Nº5	T1	TG1, TG2 y TG3

Resolución

Las magnitudes que aparecen son el número de botellas, los litros de aceite y el precio. Se establece la siguiente condición de regularidad: el precio por litro de aceite en cada oferta se mantiene igual/fijo independientemente de la cantidad que se compre. Es por ello, que tiene sentido construir las siguientes razones por cada una de las marcas de aceite:

- Aceite marca nº1: 1 botella de aceite de $\frac{3}{2}$ litros cuesta 3 €
  $\frac{3}{\frac{3}{2}}$ € cuesta 1 litro de aceite de la marca nº1= $\frac{6}{3}$ € cuesta 1 litro de aceite de la marca nº1
- Aceite marca nº2: 1 botella de aceite de $\frac{3}{4}$ litros cuesta 5€
  $\frac{5}{\frac{3}{4}}$€ cuesta 1 litro de aceite de la marca nº2=$\frac{20}{3}$€ cuesta 1 litro de aceite de la marca nº2
- Aceite marca nº3: 1 botella de aceite de 2 litros te cuesta 5 €
  $\frac{5}{2}$ € cuesta 1 litro de aceite de la marca nº3

Calculada las razones $\frac{6}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ que establecen la el precio de 1 botella de aceite por cada litro de las marca nº1, nº2 y nº3 respectivamente, establecemos la siguiente comparación

$$\frac{9}{6} < \frac{12}{6} < \frac{15}{6} \rightarrow \frac{3}{2} < \frac{6}{3} < \frac{5}{2}$$

Como conclusión, la marca nº1 es la más barata y la nº3, la más cara.

Tareas principales (penalización hasta 50% de la puntuación)

Cálculo y comparación de razones entendidas como tanto por uno.	PENALIZACIÓN DEL ERROR Hasta 0.6 ptos
Justificación de los pasos a seguir.	PENALIZACIÓN DEL ERROR Hasta 0.4 ptos

Tareas auxiliares específicas (penalización hasta 40% de la puntuación)

Obtener las razones de cada una de las ofertas (establecer la condición de regularidad del par de magnitudes).	PENALIZACIÓN DEL ERROR Hasta 0.4 ptos.
Cálculo del valor perdido	PENALIZACIÓN DEL ERROR Hasta 0.4 ptos.

Tareas auxiliares generales (penalización hasta 10% de la puntuación)	
Comparar fracciones y números decimales, operaciones con fracciones y números decimales	PENALIZACIÓN DEL ERROR Hasta 0.2 ptos.

Posibles respuestas correctas adicionales
No escribir analíticamente el término de razón, sino, resolver el ejercicio por reducción a la unidad y "tanteo". Comparar el coste de 2 botellas de aceite del mismo volumen de cada una de las ofertas. Comparar el coste de 4 botellas de aceite del mismo volumen de las tres marcas.

Posibles errores
– Calculo erróneo de la razón como tanto por uno: cálculo de la razón inversa. – En el caso de la marca nº1, no darse cuenta que el precio dado es de dos botellas, en vez de una. Lo mismo que en la marca nº3, el precio dado es para cuatro botellas. – Errores de cálculo en las operaciones con fracciones y números decimales. – Establecer erróneamente la comparación. – Interpretar mal los resultados

PREGUNTA 3 (2 puntos)		
Tres amigos Ana, Berta y David decidieron echar una quiniela de fútbol poniendo cada uno de ellos 6, 15 *y* 9 € *respectivamente. Después del fin de semana se enteraron que les había tocado un premio total de* 1200 € *¿Cuánto dinero del premio le corresponde a cada uno de ellos según los euros que han jugado? Razona como se debería hacer el reparto más justo.*		
Campos de problemas	**Técnica**	**Tecnologías**
Nº 6	T1	TG1, TG2 y TG3
Resolución		
Las magnitudes que se relacionan son la cantidad de euros jugados en la quiniela y la cantidad de euros premiados. Como la cantidad de euros premiados por 1 euro jugado en la quiniela se mantiene contante, es decir, que por cada euro jugado, la cantidad de euros premiados es la misma, tiene sentido construir la siguiente razón: se han jugado $6 + 15 + 9 = 30$ € en total en la quiniela, así que $\frac{1200}{30}$ € premiados por 1€ jugado= 40€ premiados por 1€ jugado		

Dicha razón establece los euros que corresponden del premio por cada euro jugado. El dinero que ha ganado cada amigo es: $40 \cdot 6 = 240$ € ha ganado Ana. $40 \cdot 15 = 600$ € ha ganado Berta: $40 \cdot 9 = 360$ € ha ganado David.	
Tareas principales (penalización hasta 70 % de la puntuación)	
Obtener la razón entendida como tanto por uno que establece un reparto proporcional.	PENALIZACIÓN DEL ERROR Hasta 0.9 ptos
Justificación de cómo se hace el reparto	PENALIZACIÓN DEL ERROR Hasta 0.4 ptos
Tareas auxiliares específicas (penalización hasta 20% de la puntuación)	
Cálculo del valor perdido.	PENALIZACIÓN DEL ERROR Hasta 0.4 ptos
Tareas auxiliares generales (penalización hasta 10% de la puntuación)	
Operaciones con fracciones y números decimales.	PENALIZACIÓN DEL ERROR Hasta 0.2 ptos.
Posibles respuestas correctas adicionales	
R1: Según los datos numéricos, 6 y 9 suman 15, es decir, que el alumno puede dividir inicialmente el premio entre dos. La mitad le corresponde a Berta y la otra mitad, a repartir entre Ana y David. Como 6 y 9 representan $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ y $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ de los euros jugados entre los dos, entonces $\frac{2}{5} \cdot 600 = 240$ € le corresponde a Ana y $\frac{3}{5} \cdot 600 = 360$€ a David *R2:* $6 + 15 + 9 = 30$ € Cálculo del porcentaje de euros jugados cada uno: $\frac{6}{30} \cdot 100 = 20$, es decir el 20 % del valor de la quiniela ha jugado Ana. $\frac{15}{30} \cdot 100 = 50$, es decir, el 50 % del valor de la quiniela ha jugado Berta. $\frac{9}{30} \cdot 100 = 30$, es decir, el 30% del valor de la quiniela ha jugado David. El premio se reparte en función del porcentaje jugado en la quiniela. $\frac{20}{100} \cdot 1200 = 240$€ ha ganado Ana. $\frac{50}{100} \cdot 1200 = 600$€ ha ganado Berta. $\frac{30}{100} \cdot 1200 = 360$€ ha ganado David.	

<table>
<tr><th>Posibles errores</th></tr>
<tr><td>– Calculo erróneo de la razón que establece el reparto directamente proporcional.
– Errores en la búsqueda del valor perdido y en las operaciones.
– Realizar un reparto equitativo (dividir el premio en tres partes iguales).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">PREGUNTA 4 (2 puntos)</th></tr>
<tr><td colspan="3">Un hotel necesita 5400 € para atender a 40 clientes durante 15 días. ¿Cuántos euros necesitará para atender 50 clientes durante 10 días?</td></tr>
<tr><th>Campos de problemas</th><th>Técnica</th><th>Tecnologías</th></tr>
<tr><td>Nº 7</td><td>T1</td><td>TG1, TG2 y TG3</td></tr>
<tr><th colspan="3">Resolución</th></tr>
<tr><td colspan="3">Las magnitudes que aparecen son los euros, el número de clientes y el número de días. Como el precio que necesita el hotel para atender a un cliente durante un día es constante, se puede construir las siguientes razones:
o La razón que relaciona el precio y los clientes es
$\frac{5400}{40}$ € necesita el hotel para atender a 1cliente durante 15 días= $\frac{135}{1}$ € necesita el hotel para atender a 1cliente durante 15 días
o La razón que relaciona el par (precio, número de clientes) con el número de días:
$\frac{135}{15}$ € necesita el hotel para atender a 1cliente durante 1día=$\frac{9}{1}$€ necesita el hotel para atender a 1cliente durante 1día.
$9 \cdot 10 = 90$ € necesita el hotel para atender a 1 cliente durante 10 días.
$90 \cdot 50 = 4500$€ necesita el hotel para atender a 50 clientes durante 10 días</td></tr>
<tr><th colspan="3">Tareas principales (penalización hasta 70% de la puntuación)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Obtener razón entendida como tanto por uno que relaciona las tres magnitudes. (establecer la condición de regularidad)</td><td colspan="2">PENALIZACIÓN DEL ERROR</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hasta 1.4 ptos</td></tr>
<tr><th colspan="3">Tareas auxiliares específicas (penalización hasta 20% de la puntuación)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Búsqueda del valor perdido.</td><td colspan="2">PENALIZACIÓN DEL ERROR</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hasta 0.4 ptos.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Tareas auxiliares generales (penalización hasta 20% de la puntuación)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Operaciones con fracciones y números decimales.</td><td colspan="2">PENALIZACIÓN DEL ERROR</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hasta 0.2 ptos</td></tr>
</table>

Posibles respuestas correctas adicionales
Resolver a través del método a la reducción a la unidad, sin el empleo de la razón como tanto por uno.
Posibles errores
– Cálculo erróneo de la razón entendida como tanto por uno de las tres magnitudes. – Errores en la búsqueda del valor perdido y errores en las operaciones.

<table>
<tr><th colspan="6">PREGUNTA 5 (2 puntos)</th></tr>
<tr><td colspan="6">En un paquete tengo 8000 canicas de cuatro colores: azules, amarillas, verdes y rojas. 1200 son azules ¿Cuál es el porcentaje? Las canicas amarillas y verdes representan el 65% de las canicas en total. ¿Cuántas canicas rojas hay en el paquete?</td></tr>
<tr><th colspan="2">Campos de problemas</th><th colspan="2">Técnica</th><th colspan="2">Tecnologías</th></tr>
<tr><td colspan="2">Nº8</td><td colspan="2">T2.1 y T2.2</td><td colspan="2">TG1, TG2 y TG4</td></tr>
<tr><th colspan="6">Resolución</th></tr>
<tr><td colspan="6">$\frac{1200}{8000}$ canicas azules por cada canica que hay en el paquete
$\frac{1200}{8000} \cdot 100 = 15$ canicas azules por cada 100 canicas=15% de canicas azules.
$\frac{65}{100}$ canicas amarillas y verdes por cada 100 canicas que hay en el paquete
$\frac{65}{100} \cdot 8000 = 5200$ canicas amarillas y verdes hay en total en el paquete.
$8000 - 5200 - 1200 = 1600$ canicas rojas hay en el paquete.</td></tr>
<tr><th colspan="6">Tareas principales (penalización hasta 60 % de la puntuación)</th></tr>
<tr><td colspan="6">Cuestión 1: ¿Cuál es su porcentaje?</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">Obtener la razón entendida como tanto por ciento.</td><td colspan="3">PENALIZACIÓN DEL ERROR</td></tr>
<tr><td colspan="3">Hasta 0.6 ptos</td></tr>
<tr><td colspan="6">Cuestión 2: ¿Cuántas canicas rojas hay en el paquete?</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">Operación de sustracción para el cálculo de canicas rojas.</td><td colspan="3">PENALIZACIÓN DEL ERROR</td></tr>
<tr><td colspan="3">Hasta 0.6 ptos</td></tr>
<tr><th colspan="6">Tareas auxiliares específicas (penalización hasta 30 % puntuación)</th></tr>
<tr><td colspan="6">Cuestión 1: ¿Cuál es su porcentaje?</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">Cálculo del valor perdido.</td><td colspan="3">PENALIZACIÓN DEL ERROR</td></tr>
<tr><td colspan="3">Hasta el 0.2 ptos</td></tr>
</table>

Cuestión 2: *¿Cuántas canicas rojas hay en el paquete?*	
Obtener la razón que calcula la parte	PENALIZACIÓN DEL ERROR Hasta 0.2 ptos.
Cálculo del valor perdido.	PENALIZACIÓN DEL ERROR Hasta 0.2 ptos
Tareas auxiliares generales (penalización hasta 10 % puntuación)	
Operaciones con fracciones y números decimales.	PENALIZACIÓN DEL ERROR Hasta 0.2 ptos
Posibles respuestas correctas adicionales	
$\frac{1200}{8000} \cdot 100$ =15% de canicas azules hay en el paquete. $65\% + 15\% = 80\%$ de canicas azules, verdes y amarillas hay en el paquete. $100\% - 80\% = 20\%$ de canicas rojas hay en el paquete. $\frac{20}{100}$ canicas rojas hay en el paquete por cada 100 canicas que hay en el paquete. $\frac{20}{100} \cdot 8000 = 1600$ canicas rojas hay en total en el paquete	
Posibles errores	
– Cálculo erróneo de la razón como tanto por ciento. – Cálculo erróneo de la parte y errores en las operaciones.	

PREGUNTA 6 (2 puntos)		
Los operarios de una empresa cobran un salario mensual de 800 *€. La empresa tiene que bajar un 20% el salario mensual de los trabajadores debido a que sus beneficios han decrecido. Unos meses más tarde, el gobierno aumenta* 20% *su salario. ¿Cuál es la variación porcentual? ¿Cuál es el salario mensual de los trabajadores de la empresa?*		
Campos de problemas	**Técnica**	**Tecnologías**
N. º7	T2.4	TG1, TG2 y TG4
Resolución		
La razón que determina la disminución porcentual es: $\frac{100-20}{100}$ € cobran los operarios tras haber disminuido el salario por cada euro del salario inicial.		

La razón que determina el aumento porcentual es:

$\frac{100+20}{100}$ € cobran los operarios tras haber aumentado el salario por cada euro del salario "intermedio"

La variación porcentual viene dada por:

$\frac{80}{100} \cdot \frac{120}{100} = 0.96$ € cobran finalmente respecto cada euro inicial. Dicho de otra manera, los operarios cobran 96% del salario inicial.

Es decir, el salario ha disminuido un 4% respecto del salario inicial. El salario mensual de los trabajadores viene dado por:

$\frac{96}{100}$ € cobran los operarios por cada euro del salario inicial.

$\frac{96}{100} \cdot 800 = 768$ € es el salario final de los operarios.

Tareas principales hasta (penalización hasta 70% de la puntuación)	
Cuestión 1: *¿Cuál es la variación porcentual?*	
Obtener la razón que determina el aumento porcentual.	PENALIZACIÓN DEL ERROR Hasta 0.5 ptos
Obtener la razón de la disminución porcentual	PENALIZACIÓN DEL ERROR Hasta 0.5 ptos
Argumentar que existe variación y que el salario final no permanece constante.	PENALIZACIÓN DEL ERROR Hasta 0.4 ptos
Tareas auxiliares específicas (penalización hasta 20% de la puntuación)	
Pregunta 2: *¿Cuál es el salario mensual de los trabajadores de la empresa?*	
Cálculo del valor perdido.	PENALIZACIÓN DEL ERROR Hasta 0.4 ptos
Tareas auxiliares generales (penalización hasta 10% de la puntuación)	
Operaciones con fracciones y con números decimales.	PENALIZACIÓN DEL ERROR Hasta 0.2 ptos
Posibles respuestas correctas adicionales	

$800 - 800 \cdot 0.2 = 640$ € cobran los operarios tras la bajada de su salario por la empresa.

$640 + 640 \cdot 0.2 = 768$ € cobran los operarios tras la subida de su salario por el gobierno.

$100 - \frac{768}{800} \cdot 100 = 4$ % ha disminuido su salario inicial.

Posibles errores
– Razonamiento erróneo sobre que el salario no varía al aumentar y disminuir el mismo porcentaje. – Cálculo erróneo de la razón del aumento y/o disminución porcentual. – Errores en las operaciones con fracciones y números decimales.

K. Referencias

Álvarez, M.D, Miranda, A.Y., Parra, S., Redondo, R. & Santos, T. (2011). Matemáticas para Primero de ESO. Madrid, España: Santillana

Azcárate, P. & Serradó, A. (2006) Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. Revista de Educación 340 (pp. 341-378)

Cid, E. & Escolano, R. (2015). *El número racional con significado de razón*. Trabajo presentado en clase de Didáctica de la Aritmética II. Grado en Maestro en Educación Primaria. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

Colera, J. & Gaztelu, I. (2010). Matemáticas para primero de ESO. Madrid: Grupo Anaya S.A.

Cramer, K. & Post, T. (1993). Connecting Research to Teaching Proportional Reasoning. Mathematics Teacher, 86(5), 404-407.

Escolano, R., & Gairín, J.M. (2009). Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional. Revista SUMA 62 (pp. 35-48)

Gairín, J.M., Muñoz, J.M. & Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García & L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 261 - 274). Jaén: SEIEM

Oller Marcén, A. M., & Gairín Sallán, J.M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. Revista *latinoamericana de investigación en matemática educativa*,*16*(3), 317-338.

Ordoñez, S., & Alonso, E. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*,*16*(1), 65-97.

Martínez, S., Muñoz, J.M. & Oller, A.M. (2015). Un estudio comparativo sobre la proporcionalidad compuesta en libros de texto españoles de Educación Secundaria Obligatoria durante LOGSE-LOE-LOMCE. Avances de Investigación en Educación Matemática, 8, 95-115.

Martínez, S., Muñoz, J.M., Oller, A.M. & Pecharromán, C. (2015). Una propuesta innovadora para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética en el primer ciclo de la ESO. En Consejera de Educación de la Junta de Casilla y León (Ed.), Congreso:” Las nuevas metodologías de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas”. (pp.459-470). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

Reyes-Gasperini, D. (2013). La transversalidad de la proporcionalidad. México: Distrito Federal

Ruiz, M.E. (2006) C611-19 La proporcionalidad como objeto de enseñanza del docente. Universidad Nacional de Comahue. Argentina. Recuperable de http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem06/memorias/comunicaciones/Relaos/CRE12.pdf

Sánchez, E.A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes. Revista Sigma. 11(1). pp. 10-25. Recuperable de http://revistasigma.udenar.edu.co/articulos/Volúmen XI 1/1.pdf

Webgrafía

- http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/recursos/pruebasliberadaspirls2011.pdf?documentId=0901e72b816484ba (Razón de ser del intercambio de cromos)
- http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/pisa2003liberados.pdf?documentId=0901e72b801106c6 (Razón de ser cambio de divisa)

L. ANEXOS

Anexo I: Resolución de los campos de problemas

Campo de problemas nº1

Problema 1.1

Más dulce. Menos dulce. Más salado. No se sabe si estará más dulce o más salado o igual de sabor porque no se conocen las cantidades exactas ni la relación entre lo que deberían haber echado y lo que realmente han puesto.

Campo de problemas nº2

Problema 2.1

La fecha de hoy, el número de teléfono y el número de matrícula de mi coche no son magnitudes porque no se pueden medir matemáticamente. Es decir, no tienen un sentido matemático. También podríamos representar las fechas y el número de teléfono a través de letras del abecedario. El resto si son magnitudes.

Problema 2.2

En primer lugar, comprobar que todas las expresiones son magnitudes; todas lo son salvo la fecha del día de hoy y el número de teléfono de la granja (no tienen sentido matemático, es decir, no se puede hacer operaciones matemáticas con ellas).

En segundo lugar, las magnitudes que tiene que tener cuenta el granjero son:

- ✓ *El número de vacas que tiene.*
- ✓ *El consumo diario de pienso de todas sus vacas.*
- ✓ *La cantidad de pienso que tiene almacenado en su granja.*
- ✓ *La cantidad de días que puede alimentar a todas las vacas con el pienso almacenado.*
- ✓ *La superficie de los establos de la granja.*
- ✓ *La superficie del almacén de la granja.*

Problema 2.3

Ahora bien, emparejamos que magnitudes pueden estar relacionadas y buscamos su condición de regularidad para determinar cómo se relacionan.

El número de vacas que tiene.	*El consumo diario de pienso de todas sus vacas.*

Condición de regularidad*: Cada vaca consume diariamente siempre la misma cantidad de pienso y/o con una determinada cantidad de pienso siempre podría alimentar a las mismas vacas.*

La cantidad de pienso almacenado en su granja.	*La cantidad de días que puede alimentar a todas las vacas con el pienso almacenado.*

Condición de regularidad*: La cantidad de pienso almacenado con el que puedo alimentar a las vacas es siempre la misma dada una determinada cantidad de días y/o la cantidad de días que puedo alimentar a las vacas siempre es la misma dada una determinada cantidad de pienso.*

El número de vacas que tiene.	*La superficie de los establos de la granja.*

Condición de regularidad*: La cantidad de vacas que mete en cada establo es siempre la misma. La superficie de los establos en los cuales mete a una determinada cantidad de vacas se mantiene constante.*

La cantidad de pienso almacenado en su granja.	*La superficie del almacén de su granja.*

Condición de regularidad*: La cantidad de pienso que se almacena por unidad de superficie del almacén es siempre la misma. La superficie del almacén en el que se almacena una determinada cantidad de pienso es siempre la misma.*

Campo de problemas nº3

Problema 3.1

Las cantidades de magnitud que tenemos que relacionar son: el número de cucharadas de cacao y el número de cucharadas de azúcar.

La condición de regularidad que se tiene que dar para que tenga sentido la razón es que el bizcocho mantenga el mismo sabor independientemente del tamaño. En otras palabras, la cantidad de cucharadas de cacao por cada cucharada de azúcar es *siempre la misma y/o el número de cucharadas de azúcar que se necesitan por cada cucharada de cacao es siempre la misma*

$\frac{12}{24}$ *cucharadas de azúcar por* 1 *CUCHARADA DE CACAO=* $\frac{1}{2}$ *cucharada de azúcar por 1 CUCHARADA DE CACAO*

También se puede representar $\frac{12}{24}$ *cucharadas de azúcar/* 1 *cucharada de cacao o bien,* $\frac{12}{24}$ *cucharada de azúcar/ cucharada de cacao.*

Ahora bien, la razón inversa define el número de cucharadas de cacao que se necesita por 1 cucharada de azúcar.

$\frac{24}{12}$ *cucharadas de cacao por* 1 *CUCHARADA DE AZÚCAR =* $\frac{2}{1}$ *cucharada de cacao por 1 CUCHARADA DE AZÚCAR*

También se puede representar $\frac{24}{12}$ *cucharadas de cacao/* 1 *cucharada de azúcar o bien,* $\frac{24}{12}$ *cucharada de cacao/ cucharada de azúcar.*

El resultado se puede pasar a decimal o bien dejarlo como fracción, pero conviene dejarlo como fracción para que la razón no pierda su sentido de relacionar dos cantidades de magnitudes diferentes.

Campo de problemas nº4

Problema 4.1

Para resolver este problema, debemos llevar a cabo la resolución realizada en la primera etapa, es decir, calcular la razón en tanto por uno. En primer lugar, la razón tiene sentido estableciendo la siguiente condición de regularidad: la cantidad de piezas que fabrica la máquina en cada unidad de tiempo es la misma y /o el tiempo necesario para fabricar cada piezas es siempre el mismo.

¿Cuántas piezas se fabricarán en 15 *minutos?*

- *Primera etapa:* *razón como tanto por uno*

  Calculamos la razón que relaciona el número de piezas fabricadas cada minuto:

  $\frac{8}{6}$ *piezas fabricadas en 1 MINUTO*

- *Segunda etapa:* *búsqueda del valor perdido*

  Como las magnitudes son directamente proporcionales, si una de ellas aumenta 15 *veces más la otra también.*

$$\frac{8}{6} \cdot 15 = 20 \textit{ piezas fabricadas en } 15 \textit{ minutos.}$$

¿Cuántos minutos tardarán en fabricar 32 *piezas?*

– <u>*Primera etapa:*</u>

Calculamos la razón que relaciona la cantidad de minutos que tarda una máquina en fabricar 1 pieza:

$$\frac{6}{8} \textit{ minutos tarda la máquina en fabricar 1 PIEZA}$$

– <u>*Segunda etapa*</u>*:*

$$\frac{6}{8} \cdot 32 = \ 24 \textit{ minutos necesita para fabricar } 32 \textit{ piezas.}$$

¿Cuántas piezas fabricará en 48 *minutos? Aplicamos una de las variaciones de la técnica. Como las magnitudes son directamente proporcionales, si una de ellas aumenta el doble, la otra también. Nos fijamos que* 48 *minutos es el doble que* 24*. Por tanto, las piezas que se fabrican en* 48 *minutos serán el doble de* 32 *piezas, es decir,* 64.

Campo de problemas nº5

<u>Problema 5.1</u>

Las magnitudes que se han de relacionar son el peso en gramos de las lentejas y su precio. La condición de regularidad que se debe cumplir para que tenga sentido la razón es que la cantidad de gramos de lentejas es la misma por cada euro y/o la cantidad de euros es la misma por cada gramo de lentejas.

Hay que buscar una relación comparativa entre ambas tiendas, es decir, por 1 €, cuántos gramos de lentejas me llevo, o bien, cuánto cuesta 1 gramo de lentejas en cada tienda.

<u>Primera estrategia de resolución</u>: *Buscamos la razón que determina la cantidad de gramos de lentejas que compramos por 1€.*

1ªtienda:

$$\frac{1100}{5} \textit{ gr de lentejas por 1 EURO} = \frac{1100}{5} \textit{ gramos de lentejas/ €}$$

2ª tienda:

$$\frac{1250}{6} \textit{ gr de lentejas por 1 EURO} = \frac{1250}{6} \textit{ gramos de lentejas / €.}$$

Ahora bien,

$$¿\ \frac{1100}{5} < \frac{1250}{6} \ o \ \frac{1100}{5} > \frac{1250}{6}\ ?$$

Sacando el máximo común divisor entre ambas razones:

$$\frac{1100\cdot 6}{5\cdot 6}=\frac{6600}{30}$$
$$\frac{1250\cdot 5}{6\cdot 5}=\frac{6250}{30}$$

Como $\frac{6600}{30}>\frac{6250}{30}$ *, nos llevamos más gramos de lenteja con* 1 *euro en la primera tienda, es por ello que la oferta más barata es la de la 1º tienda.*

Segunda estrategia de resolución: *buscamos la razón que determina el precio en euros que nos cuesta 1 gramo de lentejas.*

1ª tienda:

$\frac{5}{1100}$ *€ cuesta 1 GRAMO DE LENTEJA=*$\frac{5}{1100}$*€/gramo de lentejas*

2ª tienda:

$\frac{6}{1250}$*€ cuesta 1 GRAMO DE LENTEJA= =*$\frac{6}{1250}$*€/gramo de lentejas*

Sacando máximo común divisor entre ambas razones, se tiene que:

$$\frac{5}{1100}=\frac{5}{11\cdot 2^2\cdot 5^2}=\frac{5^3}{11\cdot 2^2\cdot 5^4}=\frac{125}{27500}$$
$$\frac{6}{1250}=\frac{6}{2\cdot 5^4}=\frac{6\cdot 2\cdot 11}{11\cdot 2^2\cdot 5^4}=\frac{132}{27500}$$

$$\frac{125}{27500}<\frac{132}{27500}$$

Comparando ambas razones se observa que en la primera tienda los euros por cada gramo de lenteja es menor que en la segunda tienda. Por lo tanto es más barata la oferta de la primera tienda.

Tercera estrategia de resolución: *Esta resolución alude a un problema de valor perdido.*

Calculamos la relación entre el la cantidad de gramos de lentejas que nos llevamos por 1€ en la primera tienda: $\frac{1100}{5}$ *gramos de lentejas/€.*

Calculamos la cantidad de gramos que nos llevamos con 6*€, es decir* $\frac{1100}{5}\cdot 6=1320$ *gramos de lenteja /6 €.*

Por lo tanto, en la primera tienda me llevo 1320 *gramos de lentejas por* 6 *€ y en la segunda tienda me llevo* 1250 *gramos de lentejas por* 6 *€. Por lo tanto, la oferta más barata es la de la primera tienda.*

Campo de problemas nº6

Problema 6.1

Las magnitudes que se relacionan son el dinero premiado (en euros) y el dinero (en euros) jugados por el boleto. Para poder construir la razón se debe cumplir que la cantidad de dinero premiado por cada euro aportado para pagar el boleto de lotería es siempre la misma.

Primera etapa: *razón como tanto por uno.*

$$\frac{50.000}{20}\ \text{€ premiados por 1 EURO JUGADO}$$

Segunda etapa: *búsqueda del valor perdido:*

Félix pagó 4€, luego le corresponde $\frac{50.000}{20} \cdot 4 = 10.000$ *€. Juan y Carlos pagaron 3€ así que les ha tocado* $\frac{50.000}{20} \cdot 3 = 7.500$ *€ a cada uno. Sara jugó 8€ y le ha tocado* $\frac{50.000}{20} \cdot 8 = 20.000$ *€ de premio.*

Finalmente, yo he jugado 2*€ y me ha tocado* $\frac{50.000}{20} \cdot 2 = 5.000$ *€ de premio.*

Campo de problemas nº7

Problema 7.1

Hay tres cantidades de magnitudes diferentes a relacionar, el número de motores, el número de horas que están funcionando y el número de litros de agua que necesitan para refrigerarse. Necesitamos la razón en tanto por uno de estas tres cantidades de magnitud, para ello se va construyendo la razón en tanto por uno de cada par. Antes de comenzar, veamos la condición de regularidad de cada par de magnitudes para que las razones como tanto por uno tengan sentido.

La cantidad de litros que necesitan los motores para refrigerarse cada hora es siempre la misma y/o la cantidad de horas que necesita una determinada cantidad de motores por cada litro de agua para refrigerarse es siempre la misma.

La cantidad de litros de agua que requiere cada motor para refrigerarse una determinada cantidad de horas es constante y/o el número de motores que necesitan para refrigerar cada litro de agua durante una determinada cantidad de horas es siempre el mismo.

La cantidad de horas que se necesitan para que se refrigere cada motor con una determinada cantidad de litros de agua es siempre constante y/o el número de motores *que se refrigeran cada hora con una determinada cantidad de agua es siempre el mismo.*

- *¿Cuántos litros de agua necesitará* 1 *motor funcionando durante* 6 *horas?*

  $\frac{9000}{3}$ *litros que necesita* 1 *MOTOR para que funcione* 6 *horas.*

- *¿Cuántos litros de agua necesitarán* 5 *motores funcionando* 6 *horas?*

  $\frac{9000}{3} \cdot 5 = 15000$ *litros necesitan* 5 *motores para que funcionen* 6 *horas.*

- *¿Cuántos litros de agua necesitarán* 3 *motores funcionando durante* 1 *hora?*

  Razón como tanto por uno entre el par (litros, motores) y el número de horas:

  $\frac{9000}{3}$ *litros que necesita* 1 *motor para funcionar 6 horas, es decir,* $\frac{3000}{1}$.

  La razón $\frac{\frac{3000}{1}}{6}$ *determina la cantidad de litros que necesita* 1 *MOTOR para funcionar* 1 *HORA, es decir,* $\frac{3000}{6}$

  $\frac{3000}{6} \cdot 3 = 1500$ *litros necesitan* 3 *motores para funcionar durante* 1 *hora.*

- *¿Cuánto litros de agua necesitarán* 7 *motores funcionando durante* 2 *horas?*

  $\frac{3000}{6}$ *litros de agua necesita* 1 *motor para funcionar* 1 *hora.*

  $\frac{3000}{6} \cdot 2 = 1000$ *litros de agua necesita* 1 *motor para funcionar* 2 *horas.*

  $1000 \cdot 7 = 7000$ *litros de agua necesitan* 7 *motores para funcionar* 2 *horas.*

Campo de problemas nº8

Problema 8.1 *(Técnica T2.1)*

Las cantidades de magnitudes que se relacionan: el número de alumnos que han faltado y el número de alumnos en total que hay en clase.

La razón que determina el número de alumnos que han faltado por cada alumno que hay en clase es:

$$\frac{6}{30} \text{ alumnos faltan por 1 alumno que hay en clase.}$$

Por 100 alumnos que hubiesen en clase, $\frac{6}{30} \cdot 100 = 20$ *alumnos faltarían. También se puede escribir 20% de alumnos faltan a clase.*

Problema 8.2 *(Técnica T2.2)*

Primera etapa: razón como tanto por ciento

La razón $\frac{20}{100}$ *representa que la cantidad parcial de ovejas negras que hay en el rebaño, es decir, de cada* 100 *ovejas que hay en el rebaño,* 20 *son negras.*

Segunda etapa: búsqueda del valor perdido

$$\frac{20}{100} \cdot 400 = 80$$

Hay 80 ovejas negras en el rebaño.

Problema 8.3 *(Técnica T2.3)*

Primera etapa: razón como tanto por ciento

La razón $\frac{100}{60}$ *determina las habitaciones en total que tiene el hotel por cada habitación ocupada.*

Segunda etapa: búsqueda del valor perdido.

$$\frac{100}{60} \cdot 180 = 300$$

El hotel tiene 300 *habitaciones en total.*

Problema 8.4 *(Técnica T2.4.1)*

Las cantidades de magnitud que se relacionan son los euros de propina que tiene Elena inicialmente y la propia final tras el aumento. Posteriormente, se relaciona los euros de propina "intermedios" y la propina final tras la disminución porcentual.

Parte I: Aumento

Primera etapa: razón como tanto por ciento.

La razón $\frac{100+10}{100}$ *determina los euros finales tras haber aumentado la propina por cada euro inicial*

Segunda etapa: búsqueda del valor perdido

$$\left(\frac{100+10}{100}\right) \cdot 15 = 16.5$$

Le han aumentado 1.5€ su propina, es decir, ahora tiene $15 + 1.5 = 16.5$ €

Parte II. Disminución

Primera etapa: razón como tanto por ciento.

La razón $\frac{100-20}{100}$ *determina los euros finales tras haber disminuido la propina por cada euro de la propina "intermedia".*

Segunda etapa: búsqueda del valor perdido

$$\left(\frac{100-20}{100}\right) \cdot 16.5 = 13.2$$

Le han disminuido 3.3 € *su propina, es decir,* 13.2€

Problema 8.5 *(Técnica T2.4.2)*

El par de cantidades de magnitud que se relacionan son el precio inicial del cinturón antes de ser rebajado y su precio final.

Primera etapa: razón como tanto por ciento

$\frac{100}{100-12} = \frac{100}{88}$ *determina el precio (en euros) inicial del cinturón por cada euro del precio final rebajado.*

Segunda etapa: búsqueda del valor perdido.

$$\frac{100}{88} \cdot 9 = 10.23$$

Por lo tanto, el precio inicial del cinturón era 10.23 €

Anexo II: Recurso TIC

En el proceso de institucionalización de los conceptos matemáticos mostrados en esta propuesta, en particular, de la razón como tanto por uno, el docente puede apoyarse con el programa Geogebra. A través de la actividad mostrada posteriormente, el uso de este recurso TIC tiene como finalidad que los alumnos observen a través de una representación gráfica la variación multiplicativa de las cantidades de magnitud relacionadas en una razón. Además se observa que la razón como tanto por uno ha de permanecer constante frente a la variación de dichas cantidades que la forman. Para ello, se plantea el siguiente problema:

María ha pedido un café en una cafetería. El café solamente le gusta si la mezcla tiene 75 *ml de leche y* 20 *ml de café. Se le ha olvidado decirle a la camarera las cantidades exactas de cada ingrediente y ha echado en la taza* 100 *ml de leche. Para que la mezcla tenga el sabor exacto que le gusta a María, ¿qué cantidad de café ha de echar la camarera en la taza?*

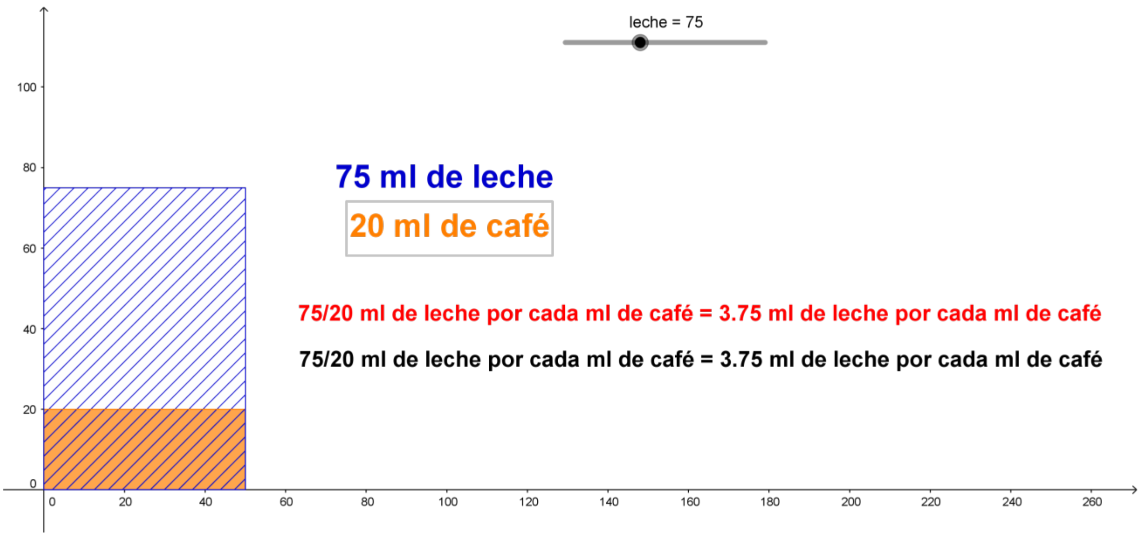


Ilustración 1 Mezcla de 75 ml de leche y 20 ml de café

Utilizando el deslizador "leche" y ajustándolo a 100 ml se calcula el valor desconocido de la cantidad de ml de café para dicha cantidad de leche.

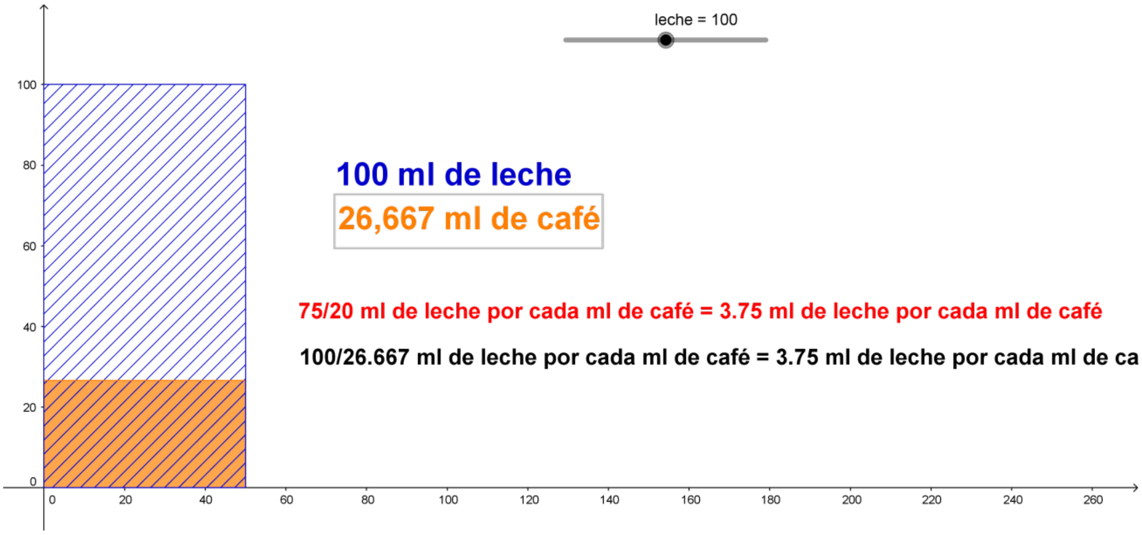


Ilustración 2 Mezcla de 100 ml de leche `y 26,667 ml de café

Supongamos que la camarera solo tiene 10 *ml de café ¿qué cantidad de leche es necesaria para que la mezcla tenga el sabor que le gusta a María?*

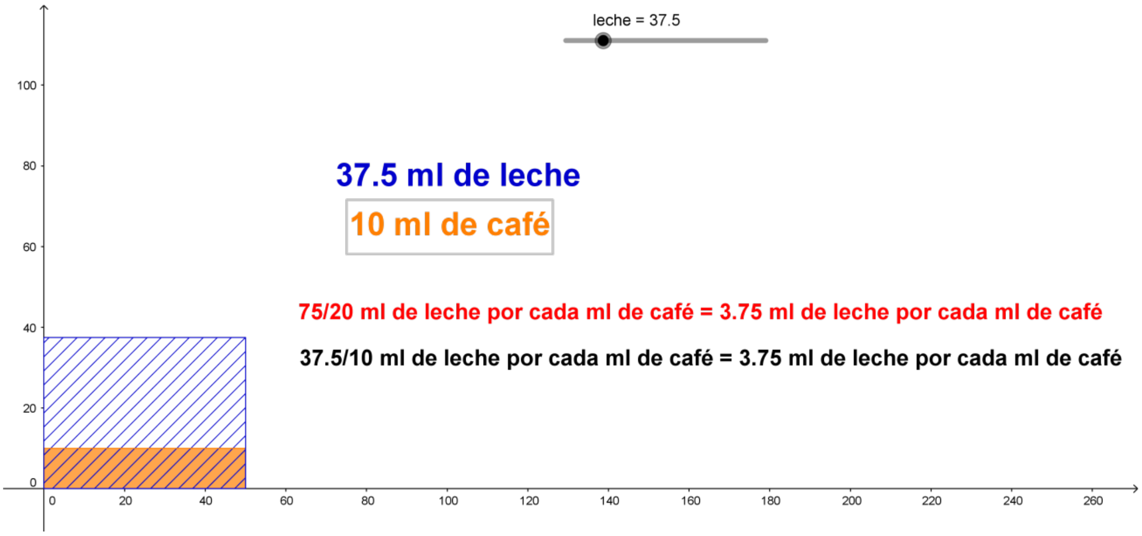


Ilustración 3 Mezcla de 37.5 ml de leche y 10 ml de café

Como conclusión a este problema, se muestra la mezcla de café y leche que le gusta a María variando sus cantidades.

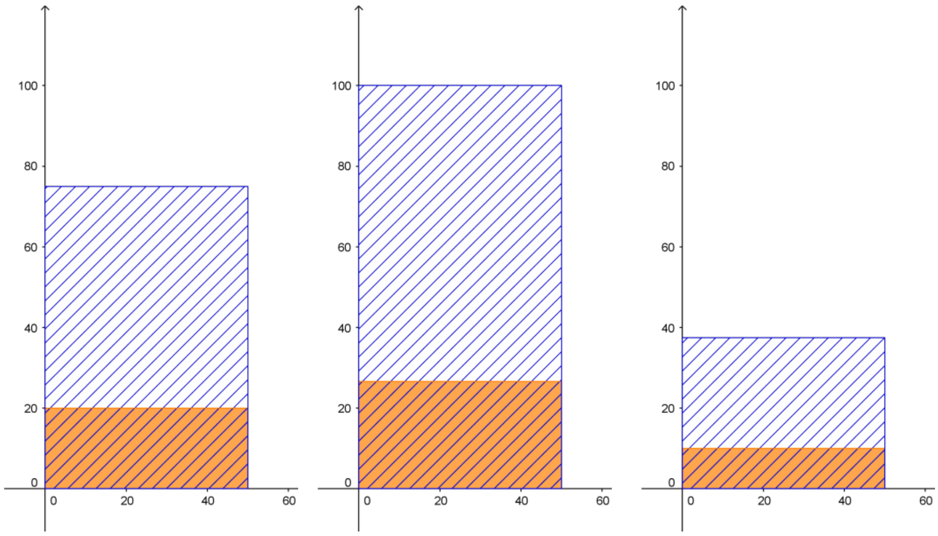


Ilustración 4 Mezclas de café y leche que le gustan a María